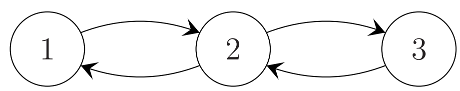
Muller Winning Conditions

Let $G = (V, E)$ be a graph without dead-end, let $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ be a partition of V that induces an arena $\mathcal{G}$. Let $\mathcal{F} = \{F_1, \cdots, F_i\}$ with $F_i \subseteq V$ for all i be a set of subsets of vertices. We let $\mathbb{G}$ be the Muller game induced by $\mathcal{F}$: Eve wins a play iff the set of vertices infinitely often in the play belongs to $\mathcal{F}$.

Question 1: Prove that winning strategies (for both players) may require memory.

Answer. *Consider the following game graph where only Eve is playing $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}\}$.*

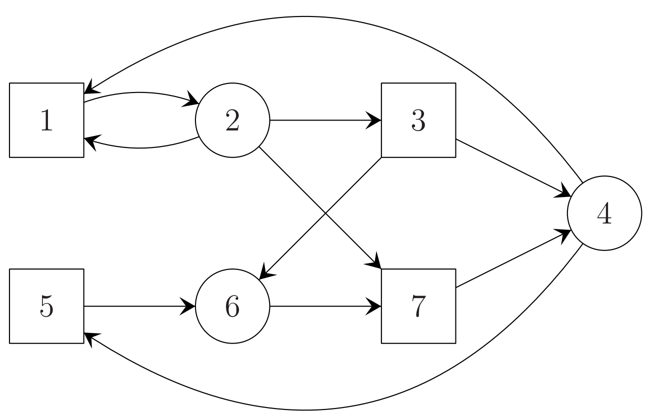


The only vertex where she has a choice is vertex 2. If she follows a memoryless strategy, the play will visit infinitely often either $\{1, 2\}$ or $\{2, 3\}$, hence will be loosing. A winning strategy (with memory) consists in alternatively playing to 1 and to 3 from 2.

The result also holds for Adam with a symmetrical example (the dual of a Muller condition is a Muller condition).

Consider the following arena and define

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$$



One checks that memoryless strategy are not winning for Eve : from 2, Eve must go to 3 (which in any case must be infinitely often visited), and if she goes from 4 to 1, Adam can move so that all vertices but 5 are visited, and if she decides to go from 4 to 5, Adam can play so that the set of infinitely often visited vertices are $\{4, 5, 6, 7\}$.

A winning strategy for Eve with memory is the following :

— From 2 go to 3

— From 4 if one comes from 3, go to 1.

— From 4, if one comes from 7 through 3 and 6, go to 5 then 6 then 7 then 4 then 1.

In different words, Eve considers in 4 what are the last two odd vertices visited :

— $(1, 3)$ or $(5, 7)$: go to 1.

— $(3, 7)$: go to 5

Note that this information can be easily updated by a finite automaton, hence such a device can implement a winning strategy for Eve.

We generalise this idea in the sequel.

Let identify V with $\{1, \ldots, n\}$. We call a *last appearance record (LAR)* a permutation of V together with an integer in $\{1, \ldots, n\}$ (called the *hit*). We represent a LAR by a n-tuple whose j-th element is underline if j is the hit. We denote by $LAR(V)$ the set of LAR over V.

With any finite sequence of vertices (hence in particular for any partial play), we associate a LAR as follows :

— $LAR(\varepsilon) = (1, \ldots, \underline{n})$;

— if $LAR(\lambda) = (v_1, \cdots, v_n)$ then $LAR(\lambda \cdot v) = (v_1, \cdots v_{j-1}, \underline{v_{j+1}}, v_{j+2}, \cdots, v_n, v)$ if $v = v_j$: v goes to the end, and its former position becomes the hit. Hence $LAR(\lambda \cdot v)$ *only depend on* v and of $LAR(\lambda)$.

Question 2: Prove that the set of vertices infinitely often repeated is F along a play iff after some time :

1. the LAR has a hit always $\geq n - |F| + 1$;
2. infinitelly often the hit is $n - |F| + 1$;
3. the last $|F|$ vertices of the LAR form a permutation of F.

Answer. *Supposons que l'on ait* 1, 2 *et* 3 *vraies à partir d'un certain moment. Il est clair que l'ensemble infiniment souvent visité est* F *(à partir d'un moment les sommets visités sont toujours dans les* $|F|$ *derniers, et ils sont donc dans* F *; de plus on n'en laisse pas de cÃ´té grace au point* 2*).*

On considère une partie $\lambda = u_1 u_2 \cdots$ *de sommets infiniment souvent visités* F*. Il existe un indice* k *tel que l'on ne voit plus que des éléments de* F *après* u_k*, et il existe* $h > k$ *tel que* $F = \{u_k, \ldots, u_h\}$*. Par définition du LAR, il est clair que les* $|F|$ *dernier sommets du LAR en* u_h *forment une permutation de* F*. On montre par récurrence que le LAR vérifie les trois propriétés voulues pour* v_l *avec* $l \geq h+1$*. Pour* $l = h+1$*, comme* $u_l \in F$ *et comme les sommets de* F *apparaissent dans les* $|F|$ *dernières positions du LAR en* u_h*, le hit en* u_l *est supérieur ou égal à* $n - |F| + 1$ *et de plus on a toujours une permutation de* F *en queue du LAR. En raisonnant de la même facon on établit donc* 1 *et* 3*. Supposons que l'on n'ai pas* 2 *: il existe* $m > h$ *tel qu'après* m *le hit soit toujours plus grand que* $n+1-|F|$ *: ainsi le* $(n+1-|F|)$*-ième sommet du LAR en* u_m *n'est plus jamais visité, et n'est donc que finiment souvent visité alors qu'il appartient à* F*, ce qui est contradictoire.*

We now define a new arena in which every vertex contains an information on the LAR. We let $G' = (V \times LAR(V), E')$ where $((v, \tau), (v', \tau')) \in E$ iff $(v, v') \in E$ and τ' is the LAR obtenained by going to v' with the LAR τ. Consider the partition of V' given by $V'_{\mathbf{E}} = V_{\mathbf{E}} \times LAR(V)$, and let $\mathcal{G}'$ be the induced arena. Finally we define a parity condition for $\mathcal{G}'$ as follows : a vertex (v, τ) such that τ has hit j, has color $2j$ if the last j elements of τ form a permutation of a subset in $\mathcal{F}$ and it has color $2j+1$ if the last j elements of τ do not form a permutation of a subset in $\mathcal{F}$.

Call $\mathbb{G}'$ the parity game defined on $\mathcal{G}'$ with the previous parity condition.

Question 3: Prove the following lemma.

Lemma. A vertex v is winning for Eve in $\mathbb{G}$ iff the vertex $(v, LAR(\varepsilon))$ is winning for Eve in $\mathbb{G}'$.

Answer. *Considérons une partie $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ dans $\mathbb{G}$. On considère alors la partie $\lambda' = v'_0 v'_1 \cdots$ dans $\mathbb{G}$ définie par $v'_i = (v_i, LAR(v_0 \cdots v_{i-1})) \cdots$ pour tout i. Il est alors facile de voir que λ est gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}$ ssi λ' est gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}'$. Ceci vient de la caractérisation donnée des sommets infiniment souvent répétés en terme de LAR, et de la définition des couleurs.*

On note τ la fonction (bijection en fait) telle que $\tau(\lambda) = \lambda'$ et π la fonction inverse qui projette λ' en λ, et on considère les versions naturelles de ces fonctions définie sur les parties partielles. Maintenant, si ϕ' est une stratégie d'Eve dans $\mathbb{G}'$ on définit la stratégie ϕ pour Eve dans $\mathbb{G}$ en posant $\phi(\lambda) = last(\pi(\tau(\lambda) \cdot \phi'(\tau(\lambda))))$, où $last$ est la fonction qui associe à une partie son dernier sommets. Il est alors facile de vérifier que ϕ est gagnante depuis v si ϕ' est gagnante depuis $(v, LAR(\varepsilon))$: en effet toute partie λ dans $\mathbb{G}$ où Eve respecte ϕ est telle que $\tau(\lambda)$ est une partie dans laquelle Eve respecte la stratégie (gagnante) ϕ' ; comme les parties gagnantes dans $\mathbb{G}$ sont exactement celles dont l'image par τ est une partie gagnante dans $\mathbb{G}'$, cela termine l'argument.

Comme cette construction peut être également faite pour une stratégie gagnante d'Adam, cela conclut la preuve.

Question 4: Prove the following theorem.

Theorem. One can compute the set of winning positions in a Muller game as well as winning strategies that needs a memory of size $k.k!$ where k is the numer of vertices in the arena.

Answer. *La première partie du résultat est une conséquence directe des deux lemmes précédents. La seconde partie (taille de la mémoire) est laissée en exercice*