TD9 : Algorithmes d'approximation

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et non-orienté. On associe à G une fonction de poids $w : E \to \mathbb{R}^+$. Pour un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$, on note $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

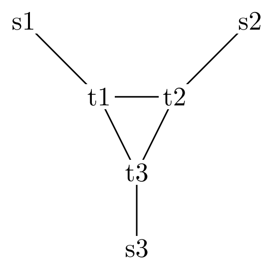
1 Multiway cut

Étant donné un ensemble des noeuds $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq V$, une coupe *multi-way* (angl. *multi-way cut*) est un ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes t.q. s_i et s_j ne sont pas dans la même composante connexe dans le graphe $G' = (V, E - M)$ ($\forall i \neq j$). Le problème de la coupe *multi-way* optimale est de trouver une coupe *multi-way* M de poids $w(M)$ minimal.

Pour $k \geq 3$ (fixé), le problème est NP-dur. Pour $k = 2$ ce problème est résoluble en temps polynomial (avec un algorithme de calcul de flot maximum). Par la suite, on va utiliser ce résultat en boîte noire. Si $S = \{s, t\}$, on parlera de "$s - t$ coupe" au lieu de "coupe *multi-way*".

Le but de cet exercice est de donner un algorithme d'approximation $2(1 - \frac{1}{k})$ pour le problème de la coupe *multi-way* minimale.

Question 1 : Trouver une coupe *multi-way* minimale pour $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ dans le graphe



où $w(s_i, t_i) = 2 - \epsilon$ (pour un certain $\epsilon > 0$) et $w(t_i, t_j) = 1$.

Question 2 : Considérer l'algorithme suivant :

1. Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, trouver une coupe minimale $C_i \subseteq E$ qui sépare s_i de $S \setminus \{s_i\}$.
2. Se débarrasser de $C_n = argmax_{C_i}(w(C_i))$, considérer $C = \bigcup_{i \neq n} C_i$.

Montrer que C est une coupe *multi-way* pour $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$.

Question 3 : Expliquer comment exécuter la première étape en temps polynomial (Indication : on identifie les noeuds de $S \setminus \{s_i\}$).

Question 4 : Supposer que A est une coupe *multi-way* optimale. On peut voir A comme une union de k coupes de la manière suivante :

Le graphe $G' = (V, E \setminus A)$ contient k composantes connexes, chacune contenant un noeud s_i (expliquer pourquoi G' ne peut pas contenir plus que k composantes).

Noter avec A_i la coupe qui sépare s_i des autres noeuds dans $S \setminus \{s_i\}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2w(A)$$

.

Question 5 : Montrer que $w(C_i) \leq w(A_i)$.

Question 6 : Expliquer pourquoi $w(C_n) \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w(C_i)$.

Question 7 : Conclure que l'algorithme fournit une garantie de performance $2(1-\frac{1}{k})$.

Question 8 : Donner un exemple de graphe qui montre que la garantie de performance $2(1-\frac{1}{k})$ qu'on a trouvée est optimale pour cet algorithme.

2 Arbres de Gomory-Hu

Un ensemble d'arêtes $M \in E$ s'appelle une k-coupe si $G' = (V, E \setminus M)$ contient k composantes connexes. Le problème de la k-coupe optimale est de trouver une k-coupe M avec $w(M)$ minimal.

Pour k fixé, le problème est résoluble en temps polynomial. Si k fait partie de l'entrée, le problème est NP-dur.

Notons avec $T = (V, E')$ un arbre (avec le même ensemble de noeuds que G ; E' n'est pas nécessairement contenu dans E) et $w' : E' \to \mathbb{R}^+$ une fonction.

Si $e \in E'$, le graphe $T' = (V, E' - \{e\})$ contient deux composantes connexes $T_1 = (V_1, E_1)$ et $T_2 = (V_2, E_2)$ (t.q. $V = V_1 \cup V_2$ et $E_1 \cup E_2 \cup \{e\} = E'$). La coupe $M(e)$ définie dans G par la partition (V_1, V_2) est la coupe associée à e dans G.

Definition 1 *L'arbre T est un arbre Gomory-Hu pour G ssi :*
- *$\forall u, v \in V$, si M est une $u-v$ coupe optimale dans G et M' est une $u-v$ coupe optimale dans T, alors $w(M) = w'(M')$.*
- *$\forall e \in E'$, $w(M(e)) = w'(e)$*

Question 1 : Soit $f(u,v)$ le poids minimal d'une $u-v$ coupe dans G. Montrer que si $f(u,v) \leq f(u,w) \leq f(v,w)$, alors $f(u,v) = f(u,w)$.

Question 2 : Montrer que, parmi les $\binom{n}{2}$ valeurs $f(u,v)$, il y a au plus $n-1$ valeurs distinctes.

Question 3 : Montrer que, $\forall u, v, w \in V$

$$f(u,v) \geq min\{f(u,w), f(w,v)\}$$

Question 4 : Montrer que, $\forall u, v, w_1, \ldots, w_r \in V$

$$f(u,v) \geq min\{f(u,w_1), f(w_1,w_2), \ldots, f(w_r,v)\}$$

Question 5 : Soit $K = (V, V^2 - \{(i,i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\})$ le graphe complet où l'on associe à l'arête (u,v) le poids $f(u,v)$. Soit T un arbre couvrant de K de poids maximal. Montrer que T satisfait la première condition d'un arbre Gomory-Hu. (Indication : considérer le chemin unique de u à v dans T).

Question 6 : Soit (V_1, V_2) une $s-t$ coupe optimale t.q. $s \in V_1$. Soient $x, y \in V_1$. Considérer le graphe G' obtenu en fusionnant tous les noeuds de V_2 en un noeud v. Le poids d'une arête (a,v) dans le nouveau graphe est $\sum_{b \in V_2} w(a,b)$. Montrer qu'une $x-y$ coupe optimale de G' définit une $x-y$ coupe optimale de G de même poids.

Question 7 : L'algorithme maintient une partition $(S_1, \ldots, S_t)$ de V et un arbre T dont les noeuds sont $S_1, \ldots, S_t$. Les poids des arêtes de T sont données par w'.

L'arbre T satisfait l'invariant suivant :

Pour toute arête (S_i, S_j) de T, il existe $a \in S_i$ et $b \in S_j$ t.q. $w'(S_i, S_j) = f(a, b)$ et la coupe définie par l'arête (S_i, S_j) est une $a - b$ coupe optimale de G.

L'algorithme commence avec la partition triviale V. A chaque étape, l'algorithme choisit une partition S_i t.q. $|S_i| \geq 2$ et raffine la partition de la manière suivante :

- on choisit deux noeuds $a, b \in S_i$
- on construit G' de la manière suivante :
  - G' contient tous les noeuds de S_i
  - on choisit S_i la racine de T ; pour chaque sous-arbre S_j de S_i on fusionne tous les noeuds de S_j.
  - les arêtes sont pondérées de la façon habituelle

  et on calcule (A, B) une $a - b$ coupe optimale de taille w_{ab} dans G'
- On sépare S_i en $S_i^a = S_i \cap A$ et $S_i^b = S_i \cap B$ et on ajoute une arête $w'(S_i^a, s_i^b) = w_{ab}$
- Si un sous-arbre S_j est dans A, alors on ajoute une arête entre S_i^a et S_j du même poids que l'arête (S_i, S_j) de l'étape précédente et si S_j est dans B, alors on ajoute une arête entre S_i^b et S_j du même poids que l'arête (S_i, S_j) de l'étape précédente.

Montrer l'invariant.

Question 8 : Conclure que l'algorithme termine en donnant un arbre Gomory-Hu.