TD14 : Matrices totalement unimodulaires

Une matrice A est dite *totalement unimodulaire* si toute matrice carrée extraite a pour déterminant $0, 1$ ou -1.

Question 1 : Que peut-on dire du problème

$$\texttt{Minimiser } c \cdot x \texttt{ tel que } A \cdot x \ = \ b \wedge x \geq 0 \text{ avec } A \in \mathbb{Z}^{m\times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$$

lorsque A est totalement unimodulaire ?

Dans la suite, on considère une matrice A telle que tout coefficient de A appartient à $0, 1, -1$ et *toute colonne a au plus deux coefficients non nuls.* I (resp. J) est l'ensemble des indices de lignes (resp. de colonnes) de A.

L'objectif du problème est d'établir deux conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit totalement unimodulaire et de concevoir un algorithme de test d'unimodularité totale d'une matrice de complexité polynomiale.

Une partition $I = I' \uplus I''$ (avec I' ou I'' éventuellement vide) est dite *admissible* si, et seulement si, pour tout couple d'indices de ligne $i_1 \neq i_2 \in I$ elle vérifie les deux conditions suivantes :
- **Si** $\exists j \ \in J \ A[i_1, j] = A[i_2, j] \neq 0$ **alors** $i_1 \in I' \Leftrightarrow i_2 \in I''$
- **Si** $\exists j \ \in J \ A[i_1, j] = -A[i_2, j] \neq 0$ **alors** $i_1 \in I' \Leftrightarrow i_2 \in I'$

Première partie

Dans cette partie, on suppose qu'il existe une partition admissible $\{I', I''\}$. On note A_1 une matrice carrée extraite de A et I_1 le sous-ensemble d'indices des lignes de A_1.

Question 2 : On suppose d'abord que toute colonne de A_1 a deux coefficients non nuls. Trouver une combinaison linéaire non nulle $\{\lambda_i\}_{i\in I_1}$ des lignes de A_1 t.q. $\sum_{i\in I_1} \lambda_i A_1[i, -] = 0$.

Question 3 : Montrer que $det(A_1) \in \{0, -1, 1\}$ par récurrence sur la dimension de A_1. On distinguera le cas où il existe une colonne de A_1 avec moins de deux coefficients non nuls et celui où toutes les colonnes de A_1 ont deux coefficients non nuls.

On considère un graphe orienté pondéré $G = (V, E, c)$ avec deux sommets distingués s et t tels que s n'a pas de prédécesseur et t n'a pas de successeur. c est la fonction de poids de E dans $\mathbb{N}^*$. On considère le programme linéaire suivant, noté `LP`, dont les variables positives sont indicées par les sommets et les arcs.

$$\texttt{Minimiser} \sum_{(i,j)\in E} c(i,j)x_{i,j} \texttt{ tel que}$$

$$\forall (i,j) \in E \ x_{i,j} - x_i + x_j \geq 0 \tag{1}$$

$$x_s - x_t \geq 1 \tag{2}$$

Question 4 : Démontrer que le problème admet une solution optimale.

Question 5 : Démontrer qu'il existe une solution optimale qui vérifie :
$$\forall i \in V, \ x_s \geq x_i \geq x_t \text{ et } \forall (i,j) \in E, \ x_{i,j} = \max(x_i - x_j, 0)$$

Question 6 : Démontrer qu'il existe une solution optimale qui vérifie :
$$\forall i \in V, \ 1 = x_s \geq x_i \geq x_t = 0 \text{ et } \forall (i,j) \in E, \ x_{i,j} = \max(x_i - x_j, 0)$$

Question 7 : Démontrer qu'il existe une solution optimale *à valeurs entières* qui vérifie :

$$\forall i \in V,\ 1 = x_s \geq x_i \geq x_t = 0 \text{ et } \forall (i,j) \in E,\ x_{i,j} = \max(x_i - x_j, 0)$$

A quel problème de graphe cette solution optimale fournit-elle une réponse ? Vous justifierez votre réponse.

Question 8 : Calculez le dual de LP. Démontrer que ce dual est équivalent au problème du flot maximal de s vers t dans lequel c est interprété comme la capacité du canal. Que peut-on conclure du théorème de la dualité forte ?

Deuxième partie

On définit les relations binaires (symétriques) suivantes entre les indices de lignes de I :

— $\bowtie$ est définie par $i \bowtie i'$ ssi $\exists j$ t.q. $A[i,j] = -A[i',j] \neq 0$.

— $\bowtie^*$ est la fermeture reflexive et transitive de $\bowtie$. On note les classes d'équivalence de $\bowtie^*$, $\{I_k\}_{1\leq k\leq K}$.

— $\sim$ est définie par $i \sim i'$ ssi $\exists j$ t.q. $A[i,j] = A[i',j] \neq 0$.

De plus, on définit la relation binaire $\approx$ entre les classes $\{I_k\}_{1\leq k\leq K}$ par $I_k \approx I_{k'}$ ssi $\exists i \in I_k\ \exists i' \in I_{k'}\ i \sim i'$. Ces relations sont illustrées sur la figure 1.

FIGURE 1 – Deux matrices et les relations $\bowtie, \sim, \approx$ associées

Question 9 : Calculer les déterminants des deux matrices de la figure 1.

Question 10 : Soit α une injection de $\{1,\ldots,S\}$ dans $\{1,\ldots,K\}$. Soient des sous-ensembles de lignes $I'_{\alpha(s)} \equiv \{i_{s,1},\ldots,i_{s,r_s}\}$ pour $1 \leq s \leq S$ telles que :

— $\forall s \leq S\ I'_{\alpha(s)} \subseteq I_{\alpha(s)}$

— $\forall s \leq S\ \forall 1 \leq m < r_s\ i_{s,m} \bowtie i_{s,m+1}$. On supposera sans perte de généralité (en multipliant éventuellement la colonne $j_{s,m}$ par -1) que :
$\exists j_{s,m}\ A[i_{s,m}, j_{s,m}] = 1 \wedge A[i_{s,m+1}, j_{s,m}] = -1$

— $\forall s < S\ i_{s,r_s} \sim i_{s+1,1}$. On supposera sans perte de généralité (en multipliant éventuellement la colonne j_{s,r_s} par -1) que :
$\exists j_{s,r_s}\ A[i_{s,r_s}, j_{s,r_s}] = 1 \wedge A[i_{s+1,1}, j_{s,r_s}] = 1$

— $i_{S,r_S} \sim i_{1,1}$. On supposera sans perte de généralité (en multipliant éventuellement la colonne j_{S,r_S} par -1) que :
$\exists j_{S,r_S}\ A[i_{S,r_S}, j_{S,r_S}] = 1 \wedge A[i_{1,1}, j_{S,r_S}] = 1$

La matrice carrée extraite A' (lignes $i_{s,m}$ et colonnes $j_{s,m}$) est représentée sur la figure 2. Calculer le déterminant de A' en fonction de la parité de S.

Question 11 : En déduire que s'il existe un cycle élémentaire de longueur impaire dans le graphe de la relation $\approx$ alors la matrice A n'est pas totalement unimodulaire.

FIGURE 2 – Une matrice carrée extraite

On dit qu'un graphe non orienté est *biparti* s'il existe (au moins) une partition de ses sommets $V = V_1 \uplus V_2$ (avec V_1 ou V_2 éventuellement vide) telle que toute arête joint un sommet de V_1 à un sommet de V_2.

Question 12 : Montrer qu'un graphe est biparti ssi il n'existe pas de cycle élémentaire de longueur impaire. Pour établir la condition suffisante on proposera un algorithme qui construit une partition ou détecte l'existence d'un tel cycle. On donnera la complexité de cet algorithme.

Question 13 : Supposons que le graphe de la relation $\approx$ soit biparti et soit $V = V_1 \uplus V_2$ une partition associée. On note $I' = \bigcup_{I_k \in V_1} I_k$ et $I'' = \bigcup_{I_k \in V_2} I_k$. Montrer que I' et I'' constituent une partition admissible.

Question 14 : En vous servant des questions précédentes, montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
- A est totalement unimodulaire.
- I admet une partition admissible.
- Le graphe de la relation $\approx$ est biparti.