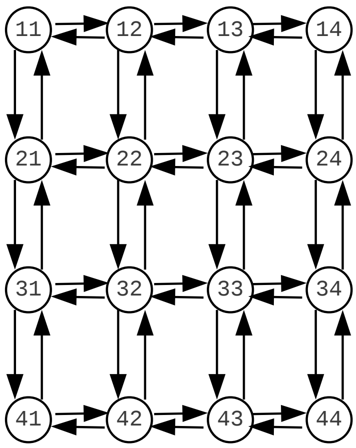
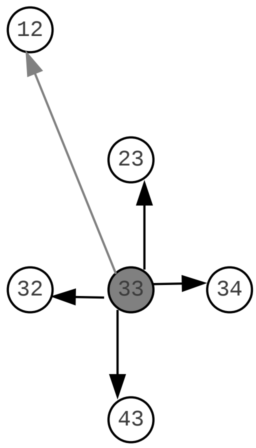
TD13 : Algorithmes probabilistes - Routage randomisé

Nous considérons un graphe aléatoire orienté (représentant un réseau social) construit de la façon suivante :

- L'ensemble des sommets V est défini par $V = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ où n est un paramètre du modèle. La *distance* entre deux sommets est définie par $d((i,j),(i',j')) = |i'-i| + |j-j'|$.
- Les arcs *fixes* forment une grille : il y a un arc entre toute paire de sommets à distance 1 (voir la partie gauche de la figure ci-dessous). Ces sommets sont dits *voisins*.
- Tout sommet $u = (i,j)$ a de plus un arc *variable* vers un sommet aléatoire (voir la partie droite de la figure ci-dessous). La *longueur* d'un tel arc est la distance entre ses deux extrémités. La distribution de ce sommet $pl(u)$ sera précisée ultérieurement. Ce sommet aléatoire peut être u ou l'un de ses voisins sur la grille et dans ce cas l'arc n'est pas ajouté.





Étant donnés deux sommets s, t et un message à envoyer de s à t, on étudie l'algorithme qui consiste à chaque étape à envoyer par un arc du graphe le message au sommet le plus proche (au sens de la distance d) de t. Par exemple dans le cas de la figure ci-dessus et d'un message à envoyer de $(3,3)$ à $(1,1)$, le sommet $(3,3)$ l'envoie au sommet $(1,2)$ qui l'envoie à son tour au sommet $(1,1)$. L'objet du problème est d'étudier l'espérance du nombre d'étapes, noté N_e, que devra parcourir le message selon la nature de la distribution pl.

Dans un premier temps, nous supposerons que $pl(u) = n^{-2}$ pour tout $u = (i,j)$, c'est à dire que la distribution pl est uniforme.

Question 1 : Soit W l'ensemble des sommets à distance au plus $n^{\frac{2}{3}}$ de t. Démontrer que $|W| \leq 4n^{\frac{4}{3}}$ pour $n \geq 4$.

Question 2 : Démontrer que la probabilité que la destination d'un arc variable appartienne à W est inférieure ou égale $4n^{-\frac{2}{3}}$.

Pour les deux questions suivantes on suppose que Δ, la distance de s à t, vérifie $\Delta > n^{\frac{2}{3}}$.

Question 3 : Démontrer que $\mathbb{P}(N_e < \frac{1}{8}n^{\frac{2}{3}}) \leq \frac{1}{2}$.

Question 4 : En déduire que $\mathbb{E}(N_e) \geq \frac{1}{16}n^{\frac{2}{3}}$.

On suppose maintenant que pour tout $u \neq v$, $pl\,(u,v) = d(u,v)^{-3} / \sum_{v' \in V \setminus \{u\}} d(u,v')^{-3}$ et $pl(u,u) = 0$. Autrement dit, la distribution est inversement proportionnelle au cube de la distance.

Question 5 : Soit v le sommet destination de l'arc variable issu d'un sommet u. Démontrer que $\mathbb{P}(d(u,v) > m) \leq \frac{4}{m}$ (avec $m \geq 1$).

Question 6 : Soit V' un sous-ensemble de sommets tel que $|V'| \leq \frac{\sqrt{n}}{8}$. Démontrer que la probabilité qu'au moins un arc variable issu de V' soit vers un sommet située à une distance supérieure à $\sqrt{n}$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Pour les deux questions suivantes on suppose que Δ, la distance de s à t, vérifie $\Delta > \frac{n}{8}$.

Question 7 : Démontrer que $\mathbb{P}(N_e \leq \frac{\sqrt{n}}{8}) \leq \frac{1}{2}$.

Question 8 : En déduire que $\mathbb{E}(N_e) \geq \frac{\sqrt{n}}{16}$.

On suppose maintenant que pour tout $u \neq v$, $pl\,(u,v) = d(u,v)^{-2} / \sum_{v' \in V \setminus \{u\}} d(u,v')^{-2}$ et $pl(u,u) = 0$. Autrement dit, la distribution est inversement proportionnelle au carré de la distance.
Question 9 : Démontrer que pour tout u, $\sum_{v' \in V \setminus \{u\}} d(u,v')^{-2} \leq 4 \ln(6n)$.

On dit que l'algorithme est dans la *phase* k, si dst, la distance du sommet courant u à la destination t, vérifie $2^{k-1} < dst \leq 2^k$. La phase -1 correspond à l'arrivée du message.

Question 10 : Supposons que l'algorithme soit dans la phase k (avec $2^{k-1} < 2n - 2$). Démontrer que la probabilité qu'il soit à l'étape suivante dans une phase inférieure à k est supérieure ou égale à $\frac{1}{2^B \ln(6n)}$ pour une constante $B \in \mathbb{N}$.

Question 11 : En déduire une borne supérieure sur le nombre moyen d'étapes pour passer d'une phase k à une plus petite phase.

Question 12 : En déduire que $\mathbb{E}(N_e) = O(\ln^2(n))$.