TD 8 : Approximations

1 Couverture de sommets

Soit A un ensemble, $|A|$ désigne son cardinal. Soit x un nombre, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $f(n) \in \Omega(g(n))$ s'il existe un entier n_0 et une constante $c > 0$ t.q. $\forall n \geq n_0\ f(n) \geq cg(n)$. Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes adjacentes à ce sommet.

Partie 1

Soit $(G_r)_r$ une famille de graphes biparti non-orientés telle que, à r fixé, $G_r = (V, E)$ vérifie

— $V = L \uplus R$ et $R = \biguplus_{1 \leq i \leq r} R_i$. De plus, $|L| = r$ et $\forall i\ |R_i| = \lfloor r/i \rfloor$.

— Pour tout i, chaque sommet de R_i est connecté à i sommets de L et aucun sommet de L n'est connecté à plus d'un sommet de R_i.

— Il n'y a pas d'autre arête.

La figure 1 illustre le cas $r = 4$.

Question 1. Quel est le degré maximum d'un sommet de L ? Donnez l'ordre de grandeur du nombre de sommets de R. Donnez une couverture de sommets de taille minimale.

Soit l'algorithme `naïf` de calcul de couverture de sommets pour un graphe $G = (V, E)$.

— On initialise le sous-ensemble C à vide puis on itère la procédure suivante.

— On cherche une arête $\{u, v\}$ t.q. $\{u, v\} \cap C = \emptyset$. S'il n'en existe pas alors C est la couverture recherchée. Sinon on choisit arbitrairement un sommet $z \in \{u, v\}$ qu'on ajoute à C.

Question 2. Expliquez comment l'algorithme `naïf` peut renvoyer R comme résultat lorsqu'il est appliqué à G_r. En déduire que sa garantie de performance appartient à $\Omega(\log(r))$.

Soit l'algorithme `moinsnaïf` de calcul de couverture de sommets pour un graphe $G = (V, E)$.

— On initialise le sous-ensemble de sommets C à vide et le sous-ensemble d'arêtes E' à E puis on itère la procédure suivante.

— Si E' est vide alors C est la couverture recherchée. Sinon on choisit un sommet u de degré maximal dans le graphe $G' = (V, E')$ qu'on ajoute à C. Puis on supprime de E' toutes les arêtes adjacentes à u.

Question 3. Expliquez comment l'algorithme `moinsnaïf` peut renvoyer R comme résultat lorsqu'il est appliqué à G_r.

On s'intéresse maintenant au problème de la couverture de sommets de poids minimal. On se donne un graphe $G = (V, E)$ et une pondération $w : V \mapsto \mathbb{N}^*$. Il s'agit de trouver une couverture de sommets C t.q. $\sum_{v \in C} w(v)$ soit minimal. On notera le graphe pondéré $G = (V, E, w)$.

Question 4. Montrer que le problème de décision sous-jacent est NP-complet (par réduction de 3-SAT).

Soit l'algorithme `encorenaïf` de calcul de couverture de sommets pour un graphe pondéré $G = (V, E, w)$.

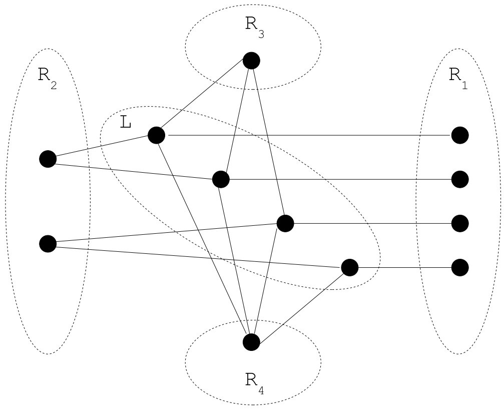

FIGURE 1 – Le graphe G_4

— On trie les sommets par poids croissant, on initialise le sous-ensemble C à vide puis on itère la procédure suivante.

— On cherche dans la liste triée le premier sommet u t.q. il existe une arête $\{u, v\}$ avec $\{u, v\} \cap C = \emptyset$. S'il n'en existe pas alors C est la couverture recherchée. Sinon on ajoute u à C.

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ et $E = \{\{v_0, v_i\}\}_{1 \leq i \leq n}$ (autrement dit une « étoile » de centre v_0).

Question 5. Proposez une pondération des sommets de ce graphe t.q. l'algorithme `encorenaïf` renvoie une couverture de taille n.

Partie 2

On suppose dans cette partie que le graphe pondéré $G = (V, E, w)$ est biparti (i.e. $V = L \uplus R$ et $\forall e \in E\ e \cap L \neq \emptyset \wedge e \cap R \neq \emptyset$).

On construit un graphe orienté $G' = (V', E')$ dont les arcs sont pondérés par une fonction w' de la façon suivante :

— $V' = V \uplus \{s, t\}$. Le sommet s est la source et le sommet t est le puits.

— $E' = \{(s, u) \mid u \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\}$
$\cup \{(u, v) \mid u \in L \wedge v \in R \wedge \{u, v\} \in E\}$.

— $\forall u \in L\ w'(s, u) = w(u) \wedge \forall v \in R\ w'(v, t) = w(v)$
$\wedge \forall \{u, v\} \in E\ w'(u, v) = M$ avec $M = 1 + \sum_{v \in R} w(v)$.

Question 6. Soit une s-t coupe de G' (i.e. une partition en deux sous-ensembles de sommets l'un S contenant s et l'autre T contenant t) dont le poids, défini par $\sum_{u \in S, v \in T, (u,v) \in E'} w'(u, v)$, est minimal. Montrez que :

1. $\forall u \in L\ \forall v \in R\ (\{u, v\} \in E \wedge u \in S) \Rightarrow v \in S$.
2. Soient $L' = L \cap T$ et $R' = R \cap S$. Alors $R' \cup L'$ est une couverture de poids minimal de G.

On rappelle qu' un flot dans le graphe orienté G' est une fonction $f : E' \mapsto \mathbb{N}$ telle que $f(u, v) \leq w'(u, v)$ pour tout $(u, v) \in E'$ et $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E'\}} f(u, v) = \sum_{\{u \mid (u,v) \in E'\}} f(v, u)$ pour tout sommet $v \in V' \setminus \{s, t\}$. La valeur d'un flot, notée $|f|$ égale, à $\sum_{\{v \mid (s,v) \in E'\}} f(s, v)$.

Question 7. Montrez le lien entre le calcul d'un flot maximal et une s-t coupe de poids minimal. En déduire un algorithme en temps polynomial pour la couverture de sommets de poids minimal dans un graphe biparti.

Partie 3

Soit S un ensemble, un multi-ensemble B de S est une fonction de S dans $\mathbb{N}$. Lorsque B est à valeurs dans $\{0,1\}$, on a affaire à un sous-ensemble. On note $B = \sum_{s\in S} B(s)\cdot s$ et on omet les coefficients unitaires et les termes de coefficient nul. Ainsi si $S = \{x,y,z\}$, $2\cdot x + y$ désigne le multi-ensemble $2\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z$. On étend l'intersection aux multi-ensembles par $B\cap B' = \sum_{s\in S} \min(B(s), B'(s))\cdot s$ et l'inclusion par $B \subseteq B'$ ssi $\forall s \in S\ B(s) \leq B'(s)$. On note $Supp(B) = \{s \mid B(s) > 0\}$.

Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré, une *double couverture* C de G est un multi-ensemble de V t.q. $\forall\{u,v\} \in E\ C(u) + C(v) \geq 2$. Le poids d'une double couverture C est défini par $\sum_{v\in V} C(v)\cdot w(v)$. Dans la suite, on cherche des doubles couvertures de poids minimal.

Question 8. Montrez qu'il existe une double couverture C de poids minimal t.q. $\forall v\ C(v) \leq 2$.

Dans la suite, on se restreint donc aux doubles couvertures C t.q. $\forall v\ C(v) \leq 2$.

Question 9. Soit C une double couverture de G, montrez que $Supp(C)$ est une couverture de G.

Question 10. Soient C une double couverture de G de poids minimal p et C' une couverture de G de poids minimal p'. Montrez que $p \leq 2p'$.

Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré, on définit le graphe biparti pondéré $G' = (V', E', w')$ ainsi :

- $V' = L \uplus R$ avec $L = \{u^L \mid u \in V\}$ et $R = \{u^R \mid u \in V\}$.
- $E' = \{\{u^L, v^R\} \mid \{u,v\} \in E\} \uplus \{\{u^R, v^L\} \mid \{u,v\} \in E\}$.
- $\forall u \in V\ w'(u^L) = w'(u^R) = w(u)$.

Question 11. Montrez qu'une couverture C' de G' peut être transformée en une double couverture C de G de même poids.

Question 12. Montrez qu'une double couverture C de G peut être transformée en une couverture C' de G' de même poids.

Question 13. Proposez un algorithme en temps polynomial pour la couverture de sommets de poids minimal qui fournisse une garantie de performance de 2.