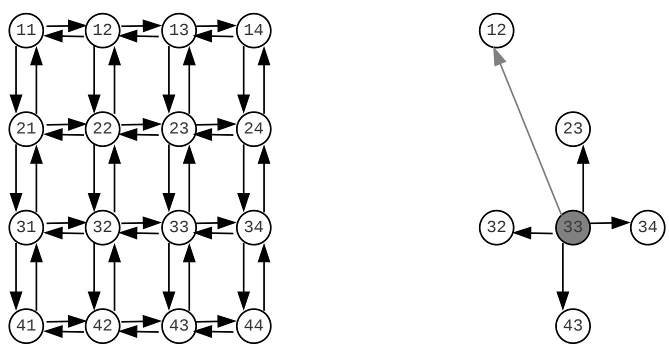
TD 12 : Algorithmes probabilistes - Routage randomisé

Nous considérons un graphe aléatoire orienté (représentant un réseau social) construit de la façon suivante :

- L'ensemble des sommets V est défini par $V = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ où n est un paramètre du modèle. La *distance* entre deux sommets est définie par $d((i, j), (i', j')) = |i' - i| + |j - j'|$.
- Les arcs *fixes* forment une grille : il y a un arc entre toute paire de sommets à distance 1 (voir la partie gauche de la figure ci-dessous). Ces sommets sont dits *voisins*.
- Tout sommet $u = (i, j)$ a de plus un arc *variable* vers un sommet aléatoire (voir la partie droite de la figure ci-dessous). La *longueur* d'un tel arc est la distance entre ses deux extrémités. La distribution de ce sommet $pl(u)$ sera précisée ultérieurement. Ce sommet aléatoire peut être u ou l'un de ses voisins sur la grille et dans ce cas l'arc n'est pas ajouté.



Etant donnés deux sommets s, t et un message à envoyer de s à t, on étudie l'algorithme qui consiste à chaque étape à envoyer par un arc du graphe le message au sommet le plus proche (au sens de la distance d) de t. Par exemple dans le cas de la figure ci-dessus et d'un message à envoyer de $(3, 3)$ à $(1, 1)$, le sommet $(3, 3)$ l'envoie au sommet $(1, 2)$ qui l'envoie à son tour au sommet $(1, 1)$. L'objet du problème est d'étudier l'espérance du nombre d'étapes, noté N_e, que devra parcourir le message selon la nature de la distribution pl.

Exercice 1. *Dans cette partie, pour tout u, v, $pl\,(u,v) = n^{-2}$. Autrement dit, on a affaire à une distribution uniforme.*

1. *Soit W l'ensemble des sommets à distance au plus $n^{\frac{2}{3}}$ de t. Démontrer que $|W| \leq 4n^{\frac{4}{3}}$ pour $n \geq 4$.*
2. *Démontrer que la probabilité que la destination d'un arc variable appartienne à W est inférieure ou égale $4n^{-\frac{2}{3}}$.*

   Pour les deux questions suivantes on suppose que Δ, la distance de s à t, vérifie $\Delta > n^{\frac{2}{3}}$.
3. *Démontrer que $\mathbf{P}(N_e < \frac{1}{8}n^{\frac{2}{3}}) \leq \frac{1}{2}$.*
4. *En déduire que $\mathbf{E}(N_e) \geq \frac{1}{16}n^{\frac{2}{3}}$.*

Exercice 2. *Dans cette partie, pour tout $u \neq v$, $pl\,(u,v) = d(u,v)^{-3}/\sum_{v' \in V\setminus\{u\}} d(u,v')^{-3}$ et $pl(u,u) = 0$. Autrement dit, la distribution est inversement proportionnelle au cube de la distance.*

1. *Soit v le sommet destination de l'arc variable issu d'un sommet u. Démontrer que $\mathbf{P}(d(u,v) > m) \leq \frac{4}{m}$ (avec $m \geq 1$).*
2. *Soit V' un sous-ensemble de sommets tel que $|V'| \leq \frac{\sqrt{n}}{8}$. Démontrer que la probabilité qu'au moins un arc variable issu de V' soit de longueur supérieure à $\sqrt{n}$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.*
3. *Pour les deux questions suivantes on suppose que Δ, la distance de s à t, vérifie $\Delta > \frac{n}{8}$.*

   Démontrer que $\mathbf{P}(N_e \leq \frac{\sqrt{n}}{8}) \leq \frac{1}{2}$.
4. *En déduire que $\mathbf{E}(N_e) \geq \frac{\sqrt{n}}{16}$.*

Exercice 3. *Dans cette partie, pour tout $u \neq v$, $pl\,(u,v) = d(u,v)^{-2}/\sum_{v' \in V\setminus\{u\}} d(u,v')^{-2}$ et $pl(u,u) = 0$. Autrement dit, la distribution est inversement proportionnelle au carré de la distance. "ln" désigne le logarithme népérien et "log" le logarithme en base 2.*

1. *Démontrer que pour tout u, $\sum_{v' \in V\setminus\{u\}} d(u,v')^{-2} \leq 4\ln(6n)$.*

   On dit que l'algorithme est dans la phase *k, si dst, la distance du sommet courant u à la destination t, vérifie $2^{k-1} < dst \leq 2^k$. La phase -1 correspond à l'arrivée du message.*
2. *Supposons que l'algorithme soit dans la phase k (avec $2^{k-1} < 2n-2$). Démontrer que la probabilité qu'il soit à l'étape suivante dans une phase inférieure à k est supérieure ou égale à $\frac{1}{256\ln(6n)}$.*
3. *En déduire que le nombre moyen d'étapes pour passer d'une phase k à une plus petite phase est inférieur ou égal à $256\ln(6n)$.*
4. *En déduire que $\mathbf{E}(N_e) = O(\log^2(n))$.*