

TD de Logique n° 8

Déduction naturelle pour calcul des prédicats

Exercice 1 (Dérivation dans DN_{pred})

Pour chacun des séquents suivants, dites si il est valide ou non. Si il valide, donnez sa dérivation dans DN_{pred} sinon donnez une interprétation qui ne le satisfait pas.

$$\forall x.P(x) \vdash \exists x.P(x) \tag{1}$$

$$\exists x.P(x) \vdash \forall x.P(x) \tag{2}$$

$$\vdash \forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x.P(x) \tag{3}$$

$$\neg(\exists x.\neg P(x)) \vdash \forall x.P(x) \tag{4}$$

$$\forall x.\forall y.A(x, y) \vdash \exists x.\forall y.\neg A(x, y) \tag{5}$$

$$\forall x.(\neg P(x)) \vdash P(a) \rightarrow (\exists y.Q(y)) \tag{6}$$

$$\vdash \forall x.\forall y.(P(x, y)) \rightarrow \neg(\forall x.(\neg P(x, x))) \tag{7}$$

Exercice 2 (Ordre des dérivations) On considère le séquent $\vdash \exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x.P(x)$. Donnez une dérivation pour ce séquent dans DN_{pred} . L'ordre dans lequel vous avez choisi vos règles est-il important ? Pourquoi ?

Exercice 3 (Réversibilité) On considère la règle de DN_{pred} suivante :

$$\frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)} (\forall x e)$$

où $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas de variables. Cette règle est-elle réversible ? C'est-à-dire a-t-on toujours que toute interprétation satisfaisant la conclusion satisfait également la prémisse.

Indice : Pour déduire le résultat, vous pouvez vous servir d'une instantiation particulière de la règle, par exemple :

$$\frac{\vdash \forall x.P(x)}{\vdash P(a)}$$