Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2014-2015

TD de Logique n° 7

# Calcul des prédicats. Sémantique

**Exercice 1 (Traduction)** Traduisez les phrases ci-dessous en suivant l'exemple.
Exemple : Tout est zéro ou un

$$\rightsquigarrow \forall x\,[\,\text{zéro}(x) \vee \text{un}(x)]$$

1. Soit tout est sucré, soit tout est salé.
2. Tout le monde aime quelqu'un.
3. Qui vole un œuf, volera un bœuf.
4. Il existe des éléphants roses.
5. Il y a des hommes ambidextres.
6. Tout fermier qui possède une vâche laitière produit du lait.

**Exercice 2 (Validité)** Montrez que :

1. $\exists y\ \forall x\ p(y,x)\ \models\ \forall x\ \exists y\ p(y,x)$
2. $\forall x\ \exists y\ p(y,x)\ \not\models\ \exists y\ \forall x\ p(y,x)$
3. $p(x)\ \not\models\ \forall x\ p(x)$.
4. $\neg(\forall x\ A)\ \equiv\ \exists x\ (\neg A)$
5. $(\exists x\ A) \vee B\ \equiv\ \exists x\ (A \vee B)$ si $x \notin VI(B)$.
6. $\forall x\ (A \vee B)\ \not\equiv\ (\forall x\ A) \vee (\forall x\ B)$, $\exists x\ (A \wedge B)\ \not\equiv\ (\exists x\ A) \wedge (\exists x\ B)$

**Exercice 3 (Symboles de fonction et égalité)** Soit un langage $\mathcal{L}$ avec le prédicat d'égalité $\doteq$ et un symbole de fonction binaire $f$.

- Donner l'interprétation du prédicat d'égalité
- Pour chacune des formule suivantes, characterisez les interprétations qui la satisfont :
  1. $\forall x \forall y \forall z \forall w\ f(x,y) \doteq f(z,w)$
  2. $\forall x \forall y \forall z\ f(x,z) \doteq f(y,z)$
  3. $\forall x \forall y\ f(x,y) \doteq f(y,y)$
  4. $\forall x \forall y \exists z\ f(x,y) \doteq f(z,y)$
  5. $\forall x \forall y \forall z\ f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z)$

**Exercice 4** Soit $\Sigma$ la signature avec $\Sigma_P = \{\, p/2, q/1 \,\}$ et $\Sigma_F = \{\, a/0, f/1, g/2 \,\}$.
Soit $\mathcal{I}$ une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(f)(n) := n+1$, $\mathcal{I}(p)(n,m) :\Leftrightarrow (n = m)$. Pour chacun des ensemble de formules $T$ suivants, complétez $\mathcal{I}$ de deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de $T$.

1. $T_1 = \{\, \forall x \forall y (p(g(x,y), g(y,x))) \,\}$ ;
2. $T_2 = \{\, \exists x(q(x)), \exists x(\neg q(x)), \forall x(q(x) \to q(f(f(x)))) \,\}$ ;
3. $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{\, \forall x \forall y (q(x) \wedge \neg q(y) \to q(g(x,y)) \,\}$ ;
4. $T_4 = T_1 \cup \big\{\, \forall x \big[q(x) \leftrightarrow \big(\neg p(x,a) \wedge \neg p(x,f(a)) \wedge \forall y \forall z (p(x, g(y,z)) \to (p(x,y) \vee p(x,z)))\big)\big] \,\big\}$.