TD de Logique n^o 6

Calcul des prédicats. Syntaxe et Sémantique

I) Révision : modélisation et preuve en logique propositionnelle

Exercice 1 On suppose les faits suivants
- S'il pleut, Joe apporte son parapluie
- Si Joe a un parapluie, Joe ne se mouille pas
- S'il ne pleut pas, Joe ne se mouille pas

Formalisez ces faits en logique propositionnelle, et déduisez-en formellement (en utilisant (1) DN_{prop}, (2) $\mathcal{G}$ et (3) la résolution) que Joe ne se mouille pas.

II) Calcul des prédicats. Syntaxe et Sémantique

Exercice 2 (Formalisation)
En utilisant les symboles de prédicat suivants

$A(x)$	« x est anglais »
$H(x, y)$	« x hait y »
$C(x, y)$	« x connaît y »

et les symboles de fonction suivants

$e(x)$	dénote le pire ennemi de x
n	dénote Napoléon

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. Tout anglais hait son pire ennemi.
2. Napoléon connaît son pire ennemi.
3. Celui qui connaît son pire ennemi ne le hait pas.
4. Personne ne connaît le pire ennemi de Napoléon.
5. Le pire ennemi de Napoléon est anglais.
6. Quiconque hait quelqu'un, ne hait pas son pire ennemi.
7. Quiconque est anglais hait tout ceux qui connaissent Napoléon.

Exercice 3 (Substitutions)

1. Soit $t = p(x, y)$. On considère les substitutions $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a)\}$ et $\sigma_2 = \{y \mapsto f(x)\}$.
   - Calculez : $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_1(\sigma_2(t))$ et $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
   - Calculez : $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$. (Rappel : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour toute variable x).
   - Est-ce que la définition de la composition s'étend à tous les termes, en particulier au terme t : est-ce vrai que $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(t) = \sigma_1(\sigma_2(t))$?
2. Soit $\sigma_1 = \{x \mapsto y\}$ et soit $\sigma_2 = \{y \mapsto x\}$. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

3. Soit s le terme $r(x, y, z)$ et les substitutions

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & \{x \mapsto f(a),\ y \mapsto f(x),\ z \mapsto b\} \\ \sigma_2 & = & \{x \mapsto f(z),\ y \mapsto f(b),\ z \mapsto b\} \\ \sigma_3 & = & \{w \mapsto z,\ z \mapsto b\} \circ \{x \mapsto f(w),\ y \mapsto a\} \end{array}$$

   Calculer $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ et $\sigma_3(s)$.

Exercice 4 (Variables libres, liées)

- Dans la formule suivante, indiquez pour chaque variable, si elle est libre ou liée, et le cas échéant à quel connecteur elle est liée.

$$F = \forall x\ [\exists y\ (p(x, y)) \wedge \exists x\ (q(y, x) \wedge \forall y\ r(y, y))]$$

- Appliquez à F la substitution $\sigma = \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(f(a))\}$.
- Transformez F pour la rendre plus lisible.

Exercice 5 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacune des formules suivantes déterminez si elles sont satisfaisables, valides, ou contradictoires (i.e. non satisfaisables) :

(1) $\forall x.\ (p(x) \vee \neg p(x))$	(3) $\forall x.\ \forall y.\ (p(x) \leftrightarrow \neg p(y))$	(5) $\neg p(x) \wedge (\exists x.\ p(x))$
(2) $\forall x.\ (p(x) \rightarrow p(z))$	(4) $\forall x.\ (p(x) \vee q(x))$	(6) $\exists x.\ (p(x) \rightarrow p(a) \wedge p(b))$

Pour chaque formule qui n'est ni valide ni contradictoire, prouvez-le.

Exercice 6 (Indépendance) Soient les formules :

1. $F_1 = \forall x.\ p(x, x)$
2. $F_2 = \forall x.\ \forall y.\ (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
3. $F_3 = \forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$

Montrez qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?