

TD de Logique n° 5

Résolution

Exercice 1 Prouver que les règles suivantes sont admissibles dans le système G .

1.

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}{\Delta \vdash B \vee A, \Gamma}$$

2.

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}{\Delta \vdash B \wedge A, \Gamma}$$

3.

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma \quad \Delta, C \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash \Gamma}$$

Exercice 2 Déterminer lesquelles de ces formules sont en forme normale conjonctive (FNC) ou en forme normale disjonctive (FND) :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{p}) \wedge (\neg \mathbf{r} \vee \mathbf{q})$
2. $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) \vee (\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vee \mathbf{r}$
3. $(\mathbf{r} \vee \mathbf{p}) \wedge (\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{r})) \wedge \mathbf{q}$
4. $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \top \vee (\neg \mathbf{r} \wedge \mathbf{s})$
5. $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$
6. $(\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}) \vee (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$
7. $\mathbf{r} \vee (\neg \mathbf{q}) \vee \mathbf{p}$

Exercice 3 Mettre les formules suivantes en FND et FNC. On appliquera dans un premier temps les équivalences, puis on écrira les tables de vérité pour en déduire les deux formes normales. Comparer les résultats.

1. $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
2. $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$
3. $(\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$
4. $(\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$
5. $(A \text{ faire chez vous})(\mathbf{p} \rightarrow \neg(\mathbf{q} \vee \mathbf{r})) \wedge (\neg(\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p})$

Exercice 4 Montrer que toute formule est équivalente à une formule en FND et à une formule en FNC.

Exercice 5 Montrer par résolution ou par réfutation les propositions suivantes

1. $\vdash \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$
2. $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}), \mathbf{p} \vdash \mathbf{q}$
3. $(\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}), (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vdash \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{r}$
4. $\vdash ((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p}$

Exercice 6 Résolution

1. Proposez un ensemble de clauses Δ contenant la lettre propositionnelle \mathbf{p} et tel qu'il existe un ensemble de clauses Δ' équivalent à $(\bigwedge \Delta) \wedge \neg \mathbf{p}$ ne contenant pas la lettre \mathbf{p} .
2. Montrer que la résolution est complète pour la réfutation, c'est à dire que si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$. On procédera par contraposition, et par récurrence sur le nombre de lettres propositionnelles dans Δ .

Exercice 7 Montrez avec la méthode de votre choix que le raisonnement suivant est correct :

- Si on révise bien, on réussit l'examen.
- Si on mange, on révise bien ou on prend du poids.
- On ne prend pas de poids, si on fait du sport ou si on ne mange pas.
- Si on ne fait pas de sport, on réussit l'examen.
- De cela on déduit que si on mange on réussit l'examen.