TD de Logique n^o 4

Calcul des séquents de Gentzen

Exercice 1 Dérivez dans $\mathcal{G}$ et dans LK les séquents suivants :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p}, \neg\mathbf{s}$
2. $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash$
3. $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \rightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
4. $(\mathbf{p} \rightarrow \neg\mathbf{p}) \wedge (\neg\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}) \vdash$

Exercice 2
Étant donnée une règle d'inférence de la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n \vdash \Delta_n}{\Gamma \vdash \Delta}$$

(avec $n \geq 0$), on dit que cette règle est *réversible* si la condition suivante est vérifiée : le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide si et seulement si les séquents $\Gamma_i \vdash \Delta_i$, pour $1 \leq i \leq n$, sont valides.

1. Montrez que la règle $\rightarrow_d$ du système $\mathcal{G}$ est réversible.
2. En fait, toutes les règles du système $\mathcal{G}$ sont réversibles. Cela nous permet de déduire une méthode automatique pour montrer si un séquent est valide ou non. Elle consiste à appliquer de façon itérative les règles du système $\mathcal{G}$ jusqu'à obtenir partout des séquents sans opérateur logique. Le séquent initial est finalement valide si tous ces derniers séquents sont des axiomes et ne l'est pas sinon (**Remarque :** Dès que l'on rencontre un séquent sans opérateur logique qui n'est pas un axiome, la méthode peut dire que le séquent initial n'est pas valide). En utilisant cette méthode, dites si les séquents suivants sont valides ou non.
   (a) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
   (b) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
   (c) $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \rightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
   (d) $\vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \rightarrow ((\neg\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$