Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2014-2015

TD de Logique n° 2

Retour sur la logique propositionnelle

Exercice 1 – Du français à la logique propositionnelle. Formaliser les phrases suivantes dans la logique propositionnelle et déterminer si l'ensemble des formules obtenu est satisfaisable. Est-il valide ?

1. Le système est en mode "multi-user" si et seulement si il fonctionne normalement.
2. Si le système fonctionne normalement, le noyau est en état de marche.
3. Soit le noyau est en état de marche, soit le système est en mode "interruption".
4. Si le système n'est pas en mode "multi-user", alors il est en mode "interruption".
5. Le système n'est pas en mode interruption.

Indice : Pour faire cet exercice, on modélisera des morceaux de phrases grâce à des propositions. Par exemple, «le système est en mode "multi-user"» peut être modélisé par la proposition `SU` et "le noyau est en état de marche" par la proposition `NE`.

Exercice 2 – Du français à la logique propositionnelle (suite). Lesquels des raisonnements suivants sont formalisables en logique propositionnelle ? Si c'est le cas, donnez une formalisation et vérifiez si le raisonnement est effectivement correct.

1. Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ;
   je serai heureux et sage ;
   donc j'étudie la logique.
2. Napoléon était allemand ;
   les allemands sont européens ;
   donc Napoléon était européen.
3. Napoléon était français ;
   tous les français sont européens ;
   donc Gengis Khan était Autrichien.
4. Si Napoléon avait été chinois, alors il aurait été asiatique ;
   Napoléon n'était pas asiatique ;
   donc il n'était pas chinois.

Exercice 3 – Interprétation. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? Contradictoires ? Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, on donnera une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait. On essayera de raisonner sans écrire la table de vérité. **(* Les exercices marqués d'une étoile sont à faire chez vous.)**

1.	$p \wedge \neg p$	7.	$p \to (p \wedge q)$	13 ∗ .	$p \vee \neg p$
2.	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	8.	$p \vee (p \to q)$	14.	$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
3.	$(p \wedge \neg p) \to q$	9 ∗ .	$q \vee (p \to q)$	15 ∗ .	$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$
4 ∗ .	$(p \wedge q) \to p$	10 ∗ .	$p \wedge (p \to q)$	16.	$(\neg p \to p) \to p$
5 ∗ .	$(p \vee q) \to q$	11 ∗ .	$q \wedge (p \to q)$	17 ∗ .	$(\neg p \to p) \to \neg p$
6 ∗ .	$p \to (p \vee q)$	12 ∗ .	$p \vee q$	18 ∗ .	$((p \to q) \to p) \to p$

Exercice 4 – Équivalence et induction.

1. Montrer que l'équivalence logique est une relation d'équivalence sur les formules logiques.
2. Soient X, A et B des formules logiques.
   - Définir $X[A \leftarrow B]$, la fonction qui remplace A par B dans X.
   - Montrer par induction sur les formules logiques que si A et B sont équivalentes, alors X et $X[A \leftarrow B]$ le sont aussi.
3. Montrer que pour toute formule logique X, il existe une formule logique X', équivalente à X, et ne contenant que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.