TD de Logique n^{o} 10

Unification

Exercice 1 Les lettres a, b, f, g, h, k, p, q sont des symboles de fonction, les autres sont des variables. Appliquez l'algorithme d'unification aux problèmes suivants :

1. $p(a, x, f(g(y))) \doteq p(z, f(z), f(u))$
2. $q(f(a), g(x)) \doteq q(y, y)$
3. $p(x, f(x), f(f(x))) \doteq p(f(f(y)), y, f(y))$
4. $p(x, f(y, z)) \doteq p(x, g(h(k(x))))$
5. $p(x, f(u, x)) \doteq p(f(y, a), f(z, f(b, z)))$
6. $p(x, f(x), g(f(x), x)) \doteq p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
7. $p(f(g(x, y)), g(v, w), y) \doteq p(f(z), x, f(x))$
8. $p(f(y), f(z), f(t), f(x)) \doteq p(g(z), g(x), g(y), g(z))$

Exercice 2

1. Montrez que $\sigma_1 = \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow a, z \leftarrow t\}$ et $\sigma_2 = \{x \leftarrow f(t), y \leftarrow a, z \leftarrow y, t \leftarrow y\}$ sont égales à un renommage près, i.e. que $\sigma_1 \sim \sigma_2$.
2. Soient $\sigma_1 = \{y \leftarrow f(x), z \leftarrow t, u \leftarrow w\}$ et $\sigma_2 = \{x \leftarrow z, y \leftarrow f(z), t \leftarrow z, w \leftarrow u\}$. A-t-on $\sigma_1 \leq \sigma_2$? A-t-on $\sigma_2 \leq \sigma_1$? A-t-on $\sigma_2 \sim \sigma_1$?

Exercice 3 (Correction)

1. Montrez la correction de l'algorithme d'unification. Pour cela
   (a) montrez que si on transforme un problème $\mathcal{P}$ en un problème $\mathcal{S}$, les unificateurs de $\mathcal{P}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{S}$. Vous raisonnerez par induction.
   (b) Montrez également que si le problème $\mathcal{P}$ est en forme résolue, c'est bien l'unificateur principal de $\mathcal{P}$ qui est obtenu.
2. La condition de bord de la règle « orienter » est-elle nécessaire pour assurer la correction ?
3. Même question pour chacune des deux conditions de bord de la règle « remplacer ».

Exercice 4 (Terminaison)

1. Montrez la terminaison de l'algorithme d'unification. Pour cela, on considérera l'ordre lexicographique sur le triplet :

$$\langle \textit{nb. de variables non résolues}, \quad \textit{taille du problème}, \quad \textit{nb. d'équations } t = s \rangle$$

   où
   - *nb. de variables non résolues* désigne le nombre de variables non résolues qui apparaissent dans le problème. Une variable x est résolue dans un problème si elle apparaît dans une équation $x \doteq t$ de ce problème, sans apparaître ni dans t ni dans aucune autre équation du problème.

- *taille du problème* désigne le nombre total de variables et de symboles de fonctions qui apparaissent dans le problème. (Chaque occurrence d'un même symbole compte pour 1).
- *nb. d'équations* $t \doteq s$ désigne le nombre d'équations de la forme $t \doteq s$ où t n'est pas une variable qui figure dans le problème, s pouvant être une variable.

2. La condition de bord de la règle « orienter » (qui impose que le membre gauche de l'équation à orienter n'est pas une variable) est-elle nécessaire pour assurer la terminaison ?
3. Même question pour chacune des deux conditions de bord de la règle « remplacer ».