TD de Logique n° 1

Retour sur l'induction

Exercice 1 On considère l'ensemble d'expressions E défini par la grammaire suivante :

$$S \to a \ | \ f(S,S) \ | \ g(S,S,S)$$

où seul l'axiome S est un non terminal. Autrement dit, E est le plus petit ensemble vérifiant :
- $a \in E$
- si $e_1, e_2 \in E$, alors $f(e_1, e_2) \in E$
- si $e_1, e_2, e_3 \in E$, alors $g(e_1, e_2, e_3) \in E$

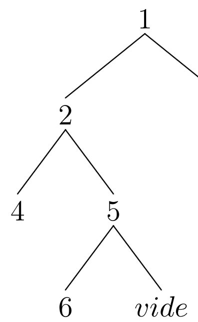
On note $|e|_a$, $|e|_f$ et $|e|_g$ le nombre de symboles 'a', 'f' et 'g' respectivement dans une expression $e \in E$. Montrez par récurrence sur la structure de l'expression que :

$$\forall e \in E . 2|e|_g + |e|_f + 1 = |e|_a$$

Exercice 2 On considère la fonction Z définie inductivement sur les arbres binaires comme suit :

$$\begin{cases} Z(vide, A_1) & := \ A_1 \\ Z(n\oe ud(A_1, A_2), A_3) & := \ Z(A_1, n\oe ud(A_3, A_2)) \end{cases}$$

1. Soit A l'arbre ci-contre (dont les nœuds ont été numérotés pour plus de clarté, les nœuds 3, 4 et 6 ayant chacun deux fils *vide*). Calculez $B = Z(A, vide)$.
2. Montrez que cette fonction est bien définie.
3. Calculez $Z(B, vide)$. Que remarquez-vous ?
4. Montrez que pour tout arbre A, $Z(Z(A, vide), vide) = A$.
   Indication : on pourra commencer par montrer (par induction) que pour tous A, B, $\quad Z(Z(A, B), vide) = Z(B, A)$.



Exercice 3 – Mots bien parenthésés. Dans cet exercice, on travaille avec un alphabet Σ dans lequel on distingue deux lettres particulières $\texttt{[} \in \Sigma$ ("crochet ouvrant") et $\texttt{]} \in \Sigma$ ("crochet fermant"), les autres éléments de Σ étant arbitraires. L'ensemble E des mots *bien parenthésés* est défini inductivement à partir des règles suivantes :
- $\varepsilon \in E$ (ε désigne le mot vide) ;
- si $x \in \Sigma$ est une lettre différente de $\texttt{[}$ et de $\texttt{]}$, alors $x \in E$;
- si $u \in E$, alors $\texttt{[}u\texttt{]} \in E$;
- si $u, v \in E$, et si u et v sont non nuls, alors $uv \in E$.

À toute lettre $x \in \Sigma$, on associe un *poids* $p(x) \in \mathbb{N}$ défini par :

$$p(\texttt{[}) = 1, \qquad p(\texttt{]}) = -1, \qquad p(x) = 0 \quad \text{si } x \in \Sigma \setminus \{\texttt{[};\texttt{]}\}.$$

On étend cette fonction de poids à tous les mots sur l'alphabet Σ en posant

$$p(x_1 x_2 \cdots x_n) \ = \ p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

pour tout mot $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^*$. En particulier, $p(\varepsilon) = 0$.

1. Montrez que tout mot bien parenthésé $u \in E$ satisfait les deux propriétés suivantes :
   (a) $p(u) = 0$.
   (b) pour tout préfixe v de u, on a $p(v) \geq 0$;
2. Montrez réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait les propriétés (a) et (b) de la question précédente, alors u est bien parenthésé.
3. Déduisez-en un algorithme qui permet de tester si un mot est bien parenthésé ou non.