Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2014-2015

Devoir Maison de Logique n^o 3

Systèmes DN_{pred} et $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Toutes les questions de tous les exercices sont indépendantes les unes des autres.

Exercice 1 Donnez une dérivation des séquents suivants dans DN_{pred} et dans $\mathcal{G}$:

1. $\vdash (\exists x\ p(x)) \to (\exists x\ p(x) \lor \exists x\ q(x))$
2. $\vdash (\forall x\ (p(x) \lor q(x))) \to (\exists x\ p(x) \lor \exists x q(x))$

Exercice 2 Donner une dérivation des séquents suivants dans $\mathcal{G}$:

1. $\forall x \forall y\ (p(x,y) \to p(y,x)), p(a,b) \vdash p(b,a)$
2. $\forall x \forall y\ (p(x,y) \to p(y,x)), \forall x \forall y\ (p(x,y) \to p(x, f(y))), p(a,b) \vdash p(f(b), a)$

Exercice 3 Les formules suivantes énoncent trois propriétés qui peuvent être satisfaites par une relation binaire :

- $\forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \land p(x,z)) \to p(y,z))$ (Euclidianité)
- $\forall x\ p(x,x)$ (réflexivité)
- $\forall x \forall y\ (p(x,y) \to p(y,x))$ (symétrie)

1. Proposez une interprétation pour le langage $\Sigma = \{p\}$, dans laquelle $I(p)$ est Euclidienne, symétrique, mais pas réflexive.
2. On considère une interprétation $\mathcal{I} =< \mathcal{D}, I >$ pour $\Sigma = \{p\}$ telle que :
   - $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$
   - $I(p) = \{(a,b), (a,c)\}$

   L'interprétation $I(p)$ du prédicat p dans $\mathcal{I}$ n'est ni Euclidienne, ni réflexive, ni symétrique. Quels couples d'élements de $\mathcal{D}$ faut-il ajouter à $I(p)$ afin qu'elle devienne Euclidienne, réflexive et symétrique ?
3. (Question BONUS non obligatoire) Donner une dérivation du séquent suivant dans $\mathcal{G}$:

$$\forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \land p(x,z)) \to p(y,z)), \forall x\ p(x,x) \vdash \forall x \forall y\ (p(x,y) \to p(y,x))$$

   Vous pouvez vous aider pour le choix des témoins de la démonstration sémantique suivante :

   Soit $\mathcal{I} =< \mathcal{D}, I >$ une interpétation pour une signature Σ avec $p \in \Sigma$ et p d'arité 2. On suppose que $\mathcal{I}(p)$ (l'interpétation de p par $\mathcal{I}$) satisfait les hypothèses du séquent (i.e., $\mathcal{I}(p)$ est Euclidienne et réflexive) et on en déduit que $\mathcal{I}(p)$ est également symétrique. Soit $a, b \in \mathcal{D}$ tels que $(a,b) \in I(p)$. La relation interprétant p dans $\mathcal{I}$ étant réflexive, on a $(a,a) \in I(p)$. En d'autres termes :

$$[p(x,y) \land p(x,z)]_{\mathcal{I}[x:=a, y:=b, z:=a]} = V$$

   Par Euclidianité on a donc également :

$$[p(y,z)]_{\mathcal{I}[x:=a, y:=b, z:=a]} = V$$

   I.e., $(b,a) \in I(p)$. La relation interprétant p dans $\mathcal{I}$ est donc bien symétrique.