Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2014-2015

Devoir Maison de Logique n^{o} 1

Induction, logique propositionnelle et déduction naturelle

Le devoir est à rendre à vos encadrants de TD la semaine du 23 février 2015.

Exercice 1 Soit E le sous-ensemble de formules de la logique propositionnelle pour lesquelles la négation est possible seulement au niveau des lettres propositionnelles. Ce sous-ensemble est défini par la grammaire suivante :

$$\phi \ ::= \ p \ \mid \ \neg p \ \mid \ \phi \wedge \phi \ \mid \ \phi \vee \phi$$

où p est une lettre propositionnelle.

On considère le raisonnement suivant qui vise à montrer par induction que toute formule ϕ appartenant à E est satisfaisable.

Cas de base : (On a deux cas de base)

- La formule p est satisfaisable
- La formule $\neg p$ est satisfaisable.

Induction : Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux formules de E et supposons que ϕ_1 et ϕ_2 sont satisfaisables.

- Soit $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Comme ϕ_1 est satisfaisable, il existe une interpretation I telle que $[\phi_1]_I = V$, et donc $[\phi]_I = V$ et par conséquent ϕ est satisfaisable.
- Soit $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Comme ϕ_1 et ϕ_2 sont satisfaisables, il existe une interpretation I telle que $[\phi_1]_I = V$ et $[\phi_2]_I = V$, et donc $[\phi]_I = V$ et par conséquent ϕ est satisfaisable.

Fin du raisonnement par induction

1. Considérons la formule suivante $p \wedge (\neg p \wedge q)$. Cette formule appartient-elle à l'ensemble E précédemment défini ? Cette formule est-elle satisfaisable ?
2. Qu'en déduisez-vous du raisonnement par induction précédent ?
3. On considère l'ensemble E' des formules de logique propositionnelle défini par la grammaire suivante :

   $$\phi \ ::= \ \neg p \ \mid \ \phi \wedge \phi \ \mid \ \phi \vee \phi$$

   où p est une lettre propositionnelle. Montrez que toute formule de E' est satisfaisable.

Exercice 2

1. Dites pour les deux formules suivantes si elle sont valides ou non. Justifiez votre réponse soit à l'aide de la table de vérité (dans le cas où la formule est valide), soit en donnant une interprétation qui ne satisfait pas la formule.
   (a) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee ((p \to q) \vee \neg r \vee \neg s)$
   (b) $p \to (((p \to r) \vee (p \to q)) \to (p \vee q))$
2. Verifiez (par exemple en utilisant une table de vérité) si l'on a $\{p \vee q, q\} \models \neg p$ et $\{(p \vee q) \to r, \neg p, \neg q\} \models r$.

Exercice 3 Donnez des dérivations dans DN_{prop} des formules suivantes :

1. $\vdash p \to (p \vee q)$
2. $\vdash (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$