

Automates avancés – Master 1 Informatique

TD 8 : Mots Infinis et Automates de Büchi

Exercice 1 :

Donnez des expressions rationnelles pour les langages de mots infinis suivants :

1. Les mots infinis sur $\{a, b, c\}$ dans lesquels n'apparaissent qu'un nombre fini de b .
2. Les mots infinis sur $\{a, b\}$ où l'on trouve la lettre a à toutes les positions paires.
3. Les mots infinis sur $\{a, b\}$ où l'on trouve la lettre uniquement aux positions paires.
4. Les mots infinis sur $\{a, b, c\}$ dans lesquels apparaissent infiniment souvent les lettres a et b .

Exercice 2 :

On suppose que l'on a un mot infini α pour lequel il existe une séquence de mots finis $(w_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et $k \geq 1$ tels quel $\alpha = w_1 w_2 w_3 \dots = w_{k+1} w_{k+2} \dots$. Montrez que $\alpha = (w_1 \dots w_k)^\omega$.

Exercice 3 :

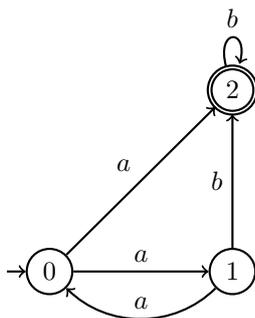


FIGURE 1 – Automate \mathcal{A}_1

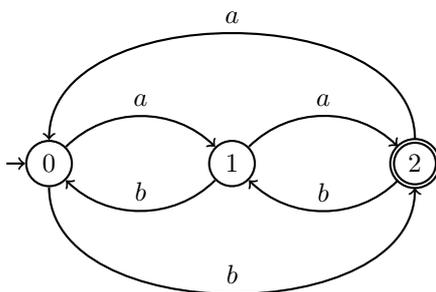


FIGURE 2 – Automate \mathcal{A}_2

On considère les automates de Büchie \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 .

1. A-t-on $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \emptyset$?
2. Est-ce-que \mathcal{A}_1 accepte le mot infini a^ω ?
3. Est-ce-que \mathcal{A}_1 accepte le mot infini $a(b)^\omega$?

4. Est-ce-que \mathcal{A}_2 accepte le mot infini $(abb)^\omega$? Si oui, décrivez une exécution de l'automate acceptant ce mot.
5. Construire un automate de Büchi \mathcal{A}' reconnaissant le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.
6. A-t-on $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \emptyset$?

Exercice 4 :

Donnez les automates de Büchi correspondant aux langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

1. $\{w \in \Sigma^\omega \mid w \text{ contient au moins une fois le motif } ab\}$.
2. $\{w \in \Sigma^\omega \mid w \text{ contient un nombre infini de fois le motif } ab\}$.
3. $\{w \in \Sigma^\omega \mid w \text{ contient un nombre fini de fois le motif } ab\}$.
4. $\{w \in \Sigma^\omega \mid w \text{ contient au moins une fois le motif } ab \text{ et au moins une fois le motif } ac\}$.
5. $\{w \in \Sigma^\omega \mid \text{si } w \text{ contient un nombre infini de } a \text{ alors il contient un nombre infini de } b\}$.
6. $\Sigma^+(aaaaa)^\omega$.

Exercice 5 :

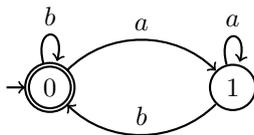


FIGURE 3 – Automate \mathcal{A}_3

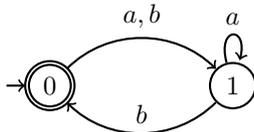


FIGURE 4 – Automate \mathcal{A}_4

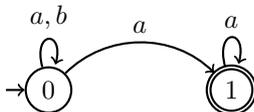


FIGURE 5 – Automate \mathcal{A}_5

Donner le langage accepté par les automates de Büchi \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 et \mathcal{A}_5 .

Exercice 6 :

Pour un mot infini w , on note $Inf(w)$ l'ensemble des lettres apparaissant un nombre infini de fois dans w . Construire l'expression régulière et l'automate de Büchi pour les langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

1. $\{w \in \Sigma^\omega \mid Inf(w) \subseteq \{a, b\}\}$.
2. $\{w \in \Sigma^\omega \mid Inf(w) = \{a, b\}\}$.

3. $\{w \in \Sigma^\omega \mid \{a, b\} \subseteq \text{Inf}(w)\}$.
4. $\{w \in \Sigma^\omega \mid \text{Inf}(w) = \{a, b, c\}\}$.
5. $\{w \in \Sigma^\omega \mid \text{si } a \in \text{Inf}(w) \text{ alors } \{b, c\} \subseteq \text{Inf}(w)\}$.

Exercice 7 :

Donner les expressions régulières et les automates de Büchi correspondant aux deux langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$:

1. $\{w \in \{a, b\}^\omega \mid k \text{ est pair pour chaque sous-mot } ba^k b \text{ de } w\}$
2. $\{w \in \{a, b\}^\omega \mid w \text{ ne contient pas } bab\}$