Automates avancés – Master 1 Informatique
TD 4 : Utilisation du lemme d'itération

Exercice 1 :

1. Montrer que le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.
2. Montrer que $\bigcup_{n\geq 0}(a^+c)^n(b^+c)^n + (a+b+c)^*cc(a+b+c)^*$ satisfait la condition du lemme de l'étoile. Est-ce que le langage est régulier pour autant ?

Exercice 2 :

Les langages suivant sont-ils réguliers ?

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a < |u|_b\}$ (où $|u|_a$ représente le nombre de a dans le mot u et $|u|_a$ représente le nombre de b dans le mot u)
2. $L_2 = \{baba^2ba^3 \ldots ba^n \mid n \geq 0\}$
3. $L_3 = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\} \setminus A^*\{aa, bb\}A^*$ avec $A = \{a,b\}$
4. $L_4 = \{a^n \mid n \text{ est un entier premier}\}$

Exercice 3 :

Nous rappelons une version améliorée du lemme de l'étoile, dit lemme de l'étoile fort :
Pour tout langage rationnel L, il existe un entier n, tel que pour tout mot f, si $f = uv_1 \ldots v_n w$ et $f \in L$ et $v_i \in A^+$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors il existe deux indices $1 \leq i < j \leq b$ tels que $uv_1 \ldots v_i(v_{i+1} \ldots v_j)^* v_{j+1} \ldots v_n w \subseteq L$.

On dit qu'un mot contient un carré si on peut l'écrire $uvvw$ avec $v \neq \epsilon$. Montrez que le langage $K = \{udv \mid u, v \in \{a,b,c\}^* \text{ and (soit } u \neq v, \text{ soit } u \text{ ou } v \text{ contient un carré)}\}$ satisfait le critère du lemme de l'étoile fort mais n'est pas régulier.

Indication : On pourra montrer que K satisfait le critère avec $n = 4$. Pour montrer que K n'est pas régulier, on pourra admettre l'existence de mots sans carré arbitrairement longs sur l'alphabet $\{a,b,c\}$.

Exercice 4 :

1. Montrer que le carré d'un langage régulier n'est pas nécessairement un langage régulier. Le carré du langage L étant défini par
$$L^2 = \{uu \mid u \in L\}.$$
2. Montrer que la racine carrée d'un langage régulier est un langage régulier. La racine carrée du langage L étant définie par
$$\sqrt{L} = \{u \mid uu \in L\}.$$
On pourra exprimer $\sqrt{L}$ comme combinaison régulier de langages obtenus à partir d'un automate reconnaissant L.