

TD de Logique n° 8

## Calcul des prédicats. Sémantique

**Exercice 1 (Validité)** Montrez que :

1.  $\exists y \forall x p(y, x) \models \forall x \exists y p(y, x)$
2.  $\forall x \exists y p(y, x) \not\models \exists y \forall x p(y, x)$
3.  $p(x) \not\models \forall x p(x)$ .
4.  $\neg(\forall x A) \equiv \exists x (\neg A)$
5.  $(\exists x A) \vee B \equiv \exists x (A \vee B)$  si  $x \notin VI(B)$ .
6.  $\forall x (A \vee B) \not\models (\forall x A) \vee (\forall x B)$ ,  $\exists x (A \wedge B) \not\models (\exists x A) \wedge (\exists x B)$

**Exercice 2 (Symboles de fonction et égalité)** Soit un langage  $\mathcal{L}$  avec le prédicat d'égalité  $\doteq$  et un symbole de fonction binaire  $f$ .

- Donner l'interprétation du prédicat d'égalité
- Pour chacune des formule suivantes, caractériser les interprétations qui la satisfont :
  1.  $\forall x \forall y \forall z \forall w f(x, y) \doteq f(z, w)$
  2.  $\forall x \forall y \forall z f(x, z) \doteq f(y, z)$
  3.  $\forall x \forall y f(x, y) \doteq f(y, y)$
  4.  $\forall x \forall y \exists z f(x, y) \doteq f(z, y)$
  5.  $\forall x \forall y \forall z f(x, f(y, z)) \doteq f(f(x, y), z)$

**Exercice 3** Soit  $\Sigma$  la signature avec  $\Sigma_P = \{p/2, q/1\}$  et  $\Sigma_F = \{a/0, f/1, g/2\}$ .

Soit  $\mathcal{I}$  une interprétation telle que son domaine est  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I}(a) = 0$ ,  $\mathcal{I}(f)(n) := n + 1$ ,  $\mathcal{I}(p)(n, m) :\Leftrightarrow (n = m)$ . Pour chacun des ensemble de formules  $T$  suivants, complétez  $\mathcal{I}$  de deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de  $T$ .

1.  $T_1 = \{ \forall x \forall y (p(g(x, y), g(y, x))) \}$  ;
2.  $T_2 = \{ \exists x (q(x)), \exists x (\neg q(x)), \forall x (q(x) \rightarrow q(f(f(x)))) \}$  ;
3.  $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{ \forall x \forall y (q(x) \wedge \neg q(y) \rightarrow q(g(x, y))) \}$  ;
4.  $T_4 = T_1 \cup \{ \forall x [q(x) \leftrightarrow (\neg p(x, a) \wedge \neg p(x, f(a)) \wedge \forall y \forall z (p(x, g(y, z)) \rightarrow (p(x, y) \vee p(x, z)))] \}$ .