Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2013-2014

TD de Logique n^o 4

Déduction Naturelle

Déduction Naturelle

Exercice 1 En utilisant $\vdash_{DN_{\text{prop}}}$, montrez les propriétés suivantes :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. $\vdash ((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q})) \to \neg\mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$
5. $\vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{p} \to \mathbf{q}$
6. $\vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ (*On pourra s'aider du tiers exclus, vu en cours*)
7. $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$

Équivalence entre déduction naturelle et système de Hilbert

Notons $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$ l'ensemble des formules propositionnelles construites à partir des seuls connecteurs $\neg$ et $\vee$ et $DN_{\neg,\vee}$ le sous-système de DN_{prop} pour l'ensemble $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$.
On va travailler dans cette partie sur $DN_{\neg,\vee}$ et H_{prop}.

Exercice 2

1. Donnez une dérivation du séquent $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vdash_{DN_{\neg,\vee}} \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$.
2. Transformez cette dérivation en une dérivation dans le système H_{prop}.
3. Donnez une dérivation du séquent $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \vdash_{DN_{\neg,\vee}} \mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.
4. Transformez cette dérivation en une dérivation dans le système H_{prop}.
5. Montrez que pour toute formule $A \in \mathbf{F}_{\neg,\vee}$ et tout ensemble fini Δ de formules de $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$: si $\Delta \vdash_{DN_{\neg,\vee}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
6. Donnez une dérivation du séquent $\vdash_{DN_{\neg,\vee}} \neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}$.
7. Montrez l'équivalence des systèmes DN_{prop} et H_{prop}, *i.e.* montrez que pour toute formule A et tout ensemble de formule Δ, on a :
   - si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
   - si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.