

TD de Logique n° 11

Calcul des prédicats : Résolution

Exercice 1 (Résolution) Montrez en utilisant la résolution que l'ensemble des clauses suivantes est réfutable :

1. $p(x, x), \neg p(y, z) \vee \neg p(z, u) \vee p(u, y), p(a, b), \neg p(b, a)$
2. $\{p(0), \neg p(x) \vee q(s(x)), \neg q(y) \vee p(s(y)), \neg q(s(s(0)))\}$

Exercice 2 (Résolution)

1. En utilisant le système de preuve par résolution, montrez que l'ensemble de formules suivante, où a est une constante, est insatisfaisable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists z. (q(f(z)) \wedge s(f(z), a)), \\ \forall x. \forall y. \neg \exists z. (p(x, y) \wedge s(x, z)), \\ [q(x) \wedge \exists y. (s(x, y))] \rightarrow [\exists y. (r(y) \wedge p(x, y))] \end{array} \right\}$$

2. Montrez, toujours avec la résolution, que la formule suivante, où a est une constante, est valide :

$$[\forall x. (p(a) \wedge (p(x) \rightarrow p(f(x))))] \rightarrow [\exists x. p(f(f(x)))]$$

Exercice 3 (Test d'occurrence, renommage et factorisation)

(a) **Nécessité du test d'occurrence dans l'unification (*occur-check*) :**

- (i) Donnez un modèle de la formule $(\forall x p(x, x)) \wedge (\forall y \neg p(y, f(y)))$.
- (ii) Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :
En unifiant $p(x, x)$ avec $p(y, f(y))$, on trouve l'unificateur principal $\{x/y, y/f(y)\}$.
Donc c'est unifiable, et on obtient la clause vide par résolution.

(b) **Nécessité du renommage :**

Soit la formule $\forall x (p(x) \wedge \neg p(f(x)))$. Sa forme clausale est $\{p(x), \neg p(f(x))\}$. Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :

Puisqu'on ne peut pas unifier $p(x)$ et $p(f(x))$ à cause du test d'occurrence, on ne peut pas déduire la clause vide par résolution à partir de $\{p(x), \neg p(f(x))\}$ et donc l'ensemble de formules est satisfaisable.

(c) **Nécessité de la factorisation :**

1. Que peut-on dire de la formule suivante ?

$$[(\forall x p(x)) \vee (\forall x' p(x'))] \wedge [(\forall y \neg p(y)) \vee (\forall y' \neg p(y'))]$$

2. Peut-on, à partir des deux clauses $\{p(x) \vee p(x'), \neg p(y) \vee \neg p(y')\}$, dériver la clause vide en utilisant la méthode de résolution sans utiliser la règle de factorisation ?