# Automates avancés – Master 1 Informatique
# TD 8 : Mots Infinis

**Exercice** 1 :

Donnez des expressions rationnelles pour les langages de mots infinis suivants :

1. Les mots infinis sur $\{a, b, c\}$ dans lesquels n'apparaissent qu'un nombre fini de $b$.
2. Les mots infinis sur $\{a, b\}$ où l'on trouve la lettre $a$ à toutes les positions paires.
3. Les mots infinis sur $\{a, b\}$ où l'on trouve la lettre uniquement aux positions paires.
4. Les mots infinis sur $\{a, b, c\}$ dans lesquels apparaissent infiniment souvent les lettres $a$ et $b$.

**Exercice** 2 :

On suppose que l'on a un mot infini $\alpha$ pour lequel il existe une séquence de mots finis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $k \geq 1$ tels quel $\alpha = w_1w_2w_3\ldots = w_{k+1}w_{k+2}\ldots$. Montrez que $\alpha = (w_1\ldots w_k)^\omega$.

**Exercice** 3 :

On considère les trois mots infinis suivants :

- $w_1 = 0000\ldots0\ldots = 0^\omega$
- $w_2 = 0101\ldots01\ldots = (01)^\omega$
- $w_3 = 010\ 101\ \ 101\ \ 101\ \ldots\ 101\ \ldots = 010(101)^\omega$

1. Donnez une formule pour chacun de ces mots caractérisant la $n$-ième lettre $a_n$ du mot.
2. De façon plus générale, caractérisez la $n$-ième du mot périodique $u_1\ldots u_j(v_1\ldots v_k)^\omega$.

À un mot infini $w = a_1a_2\ldots a_n\ldots$ on associe le réel $x$ (appartenant à $[0.1]$) caractérisé par la formule suivante : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

1. Quels sont les réels associés aux trois mots $w_1$, $w_2$ et $w_3$ ?
2. Que peut-on dire des réels associés aux mots périodiques et ultimement périodiques ?
3. Que peut-on dire des réels associés aux mots ultimement périodiques se terminant uniquement par des 0 ou uniquement par des 1 ?

**Exercice** 4 :

On considère $L \subseteq A^+$ un langage de mots finis, on appelle limite de $L$ le langage de mots infinis suivant :

$$\overrightarrow{L} = \{u_1u_2\ldots \in A^\omega \mid u_1\ldots u_n \in L \text{ pour une infinité de } n\}$$

On note $A$ l'alphabet $\{a, b\}$.

1. Montrez que $\overrightarrow{A^+b}$ est l'ensemble des mots $u \in A^\omega$ tels que $u$ contient une infinité de $b$.
2. Calculez $\overrightarrow{A^+}$ et $\overrightarrow{a^+b}$.
3. Montrez que le langage $A^+a^\omega$ n'est pas limite d'un langages de mots finis.

**Exercice** 5 :

Un mot infini $w$ est dit récurrent si tout sous-mot de $w$ apparaît un nombre infini de fois dans $w$.

1. Montrez que $w$ est récurrent si, et seulement si, tout sous-mot de $w$ apparaît au moins deux fois dans $w$.
2. Pour un mot fini $u = a_1\ldots a_n$, on définit son miroir $\tilde{u} = a_n\ldots a_1$. Un mot infini $w$ est dit invariant par miroir si pour tout sous-mot $u$ de $w$, alors $\tilde{u}$ est aussi un sous-mot de $w$. Montrez que tout mot infini invariant par miroir est récurrent.