Automates avancés – Master 1 Informatique
TD 7 : Automates à piles

Exercice 1 :

On considère l'automate suivant avec comme alphabet d'entrée $A = \{0, 1\}$, comme alphabet de pile $Z = \{Z_0, X\}$, comme états de contrôle $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ et les transitions suivantes :

$$
\begin{array}{l}
q_0, Z_0 \xrightarrow{1} q_0, X \\
q_0, X \xrightarrow{1} q_0, XX \\
q_0, Z_0 \xrightarrow{0} q_2, Z_0 \\
q_0, X \xrightarrow{0} q_1, \varepsilon \\
q_1, Z_0 \xrightarrow{0} q_2, Z_0 \\
q_1, X \xrightarrow{0} q_1, \varepsilon \\
q_2, Z_0 \xrightarrow{0} q_2, Z_0
\end{array}
$$

1. Quel est le langage reconnu par cet automate à pile lorsque il accepte par pile vide ?
2. Qu'en est-il si le mode d'acceptation est par état final sur l'état q_2 ?

Exercice 2 :

On considère l'automate suivant avec comme alphabet d'entrée $A = \{a, b\}$, comme alphabet de pile $Z = \{Z_0, A, B\}$, comme états de contrôle $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}$ et les transitions suivantes :

$$
\begin{array}{l}
q_0, Z_0 \xrightarrow{a} q_1, AAZ_0 \\
q_0, Z_0 \xrightarrow{b} q_2, BZ_0 \\
q_0, Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon \\
q_1, A \xrightarrow{a} q_1, AAA \\
q_1, A \xrightarrow{b} q_1, \varepsilon \\
q_1, Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_0, Z_0 \\
q_2, B \xrightarrow{a} q_3, \varepsilon \\
q_2, B \xrightarrow{b} q_2, BB \\
q_3, B \xrightarrow{\varepsilon} q_1, \varepsilon \\
q_3, Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1, AZ_0
\end{array}
$$

1. Les mots abb et bab sont-ils acceptés par l'automate ?
2. Quel est le contenu de la pile après lecture de b^7a^4 ?
3. Quel est le langage accepté par cet automate si on suppose qu'il accepte par état final q_f ?

Exercice 3 :

Construire des automates à piles reconnaissant chacun des langages suivant, et précisez dans chacun des cas le mode d'acceptation pour lequel vous avez opté :

1. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b + 1 \text{ et } \forall w_1 w_2 = w, \text{ on a } |w_1|_a \geq |w_1|_b\}$ où $|w|_c$ représente le nombre d'occurrences de la lettre c dans le mot w ;
2. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2.|w|_b\}$;
3. $\{a^n b^p \mid n \geq p \geq 0\}$;
4. $\{a^n b^p \mid p \geq n \leq 0\}$;
5. $\{a^n b^p \mid n \neq p\}$;
6. $\{a^{i_1} b a^{i_2} b \dots a^{i_n} b \mid n > 0 \text{ et } \exists j. i_j \neq j\}$;
7. $\{a^n b^p a^n \mid n, p > 0\} \cup \{a^n b^p c^p \mid n, p > 0\}$.

Exercice 4 :
On considère la grammaire algébrique G suivante :

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \ + \ C \\ A & \rightarrow & aAb \ + \ ab \\ B & \rightarrow & cBd \ + \ cd \\ C & \rightarrow & aCd \ + \ aDd \\ D & \rightarrow & bDc \ + \ bc \end{array}$$

1. Décrire le langage $L_G(S)$.
2. Mettre G en forme réduite pour S.
3. Mettre G en forme de Greibach.
4. En déduire l'automate à pile acceptant le langage $L_G(S)$ en précisant le mode d'acceptation considéré.

Exercice 5 :
On considère la grammaire suivante sur l'alphabet $\{[,]\}$:

$$S \quad \rightarrow \quad [S]S$$

1. Décrire $L_G(S)$.
2. Donner l'automate à pile acceptant le langage $L_G(S)$ en précisant le mode d'acceptation considéré.

Exercice 6 :
Pour les deux grammaires G suivantes, donner l'automate à pile acceptant le langage $L_G(S)$ en précisant le mode d'acceptation.

1. $$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & TU \\ T & \rightarrow & US \ + \ b \\ U & \rightarrow & ST \ + \ a \end{array}$$

2. $$S \quad \rightarrow \quad SSa \ + \ b$$