Automates avancés – Master 1 Informatique
TD 5 : Langages algébriques

Exercice 1 :
Quels sont les langages engendrés par les grammaires suivantes :

1. $S \rightarrow aS + aSbS + \varepsilon$
2. $X \rightarrow aXbb + \varepsilon$

Exercice 2 :
Donnez une grammaire algébrique pour les langages suivants :

1. $L_1 = a^*b$
2. $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
3. $L_3 = \{a^n b^p \mid n > p > 0\}$
4. $L_4 = \{a^n b^p \mid n \neq p \text{ et } n, p \geq 0\}$
5. $L_5 = \{a^n b^p c^q \mid n, q \geq 0, p \geq n + q\}$
6. $L_6 = \{a^n b^p \mid n \neq p + 2, n, p \geq 0\}$

Exercice 3 :
Si u est un mot appartenant à A^* tel que $u = a_1 a_2 \ldots a_n$, on appelle miroir de u le mot $\widetilde{u} = a_n \ldots a_2 a_1$. Montrez que les langages suivants sont algébriques.

1. $L_1 = \{uc\widetilde{u} \mid u \in \{a, b\}^*\}$
2. $L_2 = \{u\widetilde{u} \mid u \in \{a, b\}^*\}$
3. $L_3 = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = \widetilde{u}\}$
4. $L_4 = \{uc\widetilde{v} \mid u, v \in \{a, b\}^* \text{ et } u \neq v\}$
5. $\widetilde{L} = \{\widetilde{u} \mid u \in L \text{ et } L \text{ est algébrique}\}$

Exercice 4 :

1. Réduire la grammaire suivante pour la variable S :

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow aT + bTU + abTS + UV & & V \rightarrow aU + bU \\ T \rightarrow aU + bT + a & & V \rightarrow aT + bS + a \end{array}$$

2. Réduire la grammaire suivante pour la variable S :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AB + aS + b & C \rightarrow cC + cE + c \\ A \rightarrow BD + CD & D \rightarrow DD + DC \\ B \rightarrow bB + b + Db & E \rightarrow aSa \end{array}$$

Exercice 5 :

1. Soit l'alphabet $A = \{+, =, a\}$. Donnez une grammaire algébrique G (muni d'une variable S) tel que $L_G(S)$ soit le langage dont chaque mot représente une addition correcte de deux suites de caractères a. Par exemple $L_G(S)$ contiendra le mot $aa + aaa = aaaaa$.

Exercice 6 :
Soit la grammaire G contenant l'unique règle $S \rightarrow aSS + b$. Soit $L = L_G(S)$. Pour tout mot $u \in \{a, b\}^*$, on note $|u|_a$ le nombre de a dans u et $|u|_b$ le nombre de b dans u.

1. Montrez que tout mot $u \in L$ vérifie la propriété (I) : $|u|_b = |u|_a + 1$.
2. Montrez que tout mot $u \in L$ vérifie la propriété (II) : pour tout préfixe v de u tel que $u \neq v$, on a $|v|_a \geq |v|_B$.
3. Montrez que si un mot $u \in \{a, b\}^*$ vérifie (I) et (II) alors soit $u = b$ soit u commence par a et il existe un plus petit mot u_1 tel que $u = au_1u_2$ et $|au_1|_a = |au_1|_b$ et montrez que u_1 et u_2 vérifient également (I) et (II).
4. Déduisez-en que L est exactement l'ensemble des mots dans $\{a, b\}^*$ vérifiant (I) et (II).