

# Théorie et pratique de la concurrence – Master 1 Informatique

## TD 2 : LTL

On rappelle des notions de base de la logique temporelle LTL.

Les formules de LTL se construisent selon la grammaire :

$$\phi ::= \textit{proposition} \parallel \phi \vee \phi \parallel \phi \wedge \phi \parallel \neg\phi \parallel \bigcirc\phi \parallel \diamond\phi \parallel \square\phi \parallel \phi\mathcal{U}\phi$$

Elles s'interprètent sur les traces  $\sigma$ , à une position donnée  $i$ .

- $\sigma, i \models p$  ssi  $p$  est satisfaite dans l'état  $\sigma(i)$
- $\sigma, i \models \bigcirc\phi$  ssi  $\sigma, i + 1 \models \phi$
- $\sigma, i \models \diamond\phi$  ssi  $\exists j \geq i : \sigma, j \models \phi$
- $\sigma, i \models \square\phi$  ssi  $\forall j \geq i : \sigma, j \models \phi$
- $\sigma, i \models \phi\mathcal{U}\psi$  ssi  $\exists j \geq i : (\sigma, j \models \psi) \wedge (\forall k \in [i, j[: \sigma, k \models \phi)$

Ensuite on dit qu'une trace satisfait une formule si elle la satisfait à la position initiale.

- $\sigma \models \phi$  ssi  $\sigma, 0 \models \phi$

Finalement on dit qu'une structure de Kripke  $G$  satisfait une formule si toute trace de  $G$  satisfait la formule.

### Exercice 1:

*Evaluer les formules*

Dans le tableau suivant on regarde les 8 premiers états d'une trace  $\sigma$ , et on précise pour chaque état quelles sont les propositions satisfaites. On supposera que pour les états ultérieurs, aucune proposition n'est satisfaite.

On demande de compléter le tableau en indiquant dans chaque case si la formule est satisfaite (1) ou pas (0).

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma(i)$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{q\}$	$\{p\}$	$\emptyset$	$\{p, q\}$	$\emptyset$
$p \wedge q$								
$\diamond(p \wedge q)$								
$p\mathcal{U}q$								
$p\mathcal{U}\neg q$								

### Exercice 2:

*Compréhension de LTL (1)*

Pour chacune des formules suivantes, donnez une trace qui la satisfait et une qui ne la satisfait pas, si possible. Si une de ces possibilités ne se présente pas, argumentez pourquoi.

1.  $\square\diamond p$
2.  $(\square\diamond p) \wedge (\square\diamond\neg p)$
3.  $(\diamond\square p) \wedge (\diamond\square\neg p)$
4.  $p\mathcal{U}q$
5.  $(p\mathcal{U}q) \wedge (p\mathcal{U}\neg q)$
6.  $\square((p\mathcal{U}q) \wedge (p\mathcal{U}\neg q))$
7.  $(\square p) \vee (\diamond\neg p)$
8.  $(\diamond p) \wedge (\diamond\neg p)$
9.  $\square(p \Rightarrow \bigcirc q)$

**Exercice 3:**

*Compréhension de LTL (2)*

Pour chacune des formules de l'exercice précédent, donnez une structure de Kripke (un système) finie qui satisfait la formule (si la formule est satisfaisable).

**Exercice 4:**

*LTL vers Français*

Exprimer dans un Français ordinaire, les propriétés LTL suivantes :

1.  $(\diamond p) \Rightarrow (\Box q)$
2.  $\Box(q \Rightarrow \Box \neg p)$
3.  $\diamond \Box q \Rightarrow \Box \diamond p$

**Exercice 5:**

*Français vers LTL*

Donner des formules de LTL qui formalisent les propriétés suivantes - précisez quelles sont les propositions atomiques dont vous avez besoin :

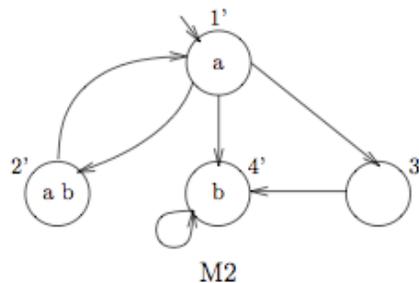
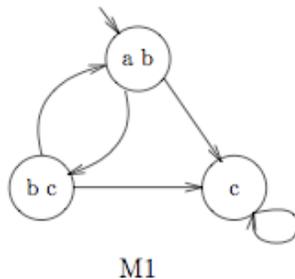
1. Deux feux de croisements ne sont jamais au vert simultanément.
2. Si la porte est ouverte, elle sera fermée à l'étape suivante.
3.  $p$  devient vraie avant  $r$ .
4. Inévitablement, la première porte est ouverte ou la deuxième porte est ouverte.
5. Aucune autre commande de café n'est acceptée entre l'acquittement de la somme due et l'enlèvement du gobelet.
6.  $p$  a lieu au plus une fois.
7.  $p$  a lieu au plus deux fois.
8. Le feu clignote toujours.
9. Dans un ascenseur, si on appuie sur le bouton d'un étage, la porte s'y ouvrira.
10. Les feux s'allument toujours dans l'ordre vert, jaune, rouge et puis vert, etc. avec un seul feu allumé à la fois.

**Exercice 6:**

*Vérification de LTL*

Indiquez quelle est la valeur de vérité pour les deux formules LTL suivantes par rapport aux structures de Kripke ci-dessous. Si une formule n'est pas satisfaite, est-ce qu'on pourrait la satisfaire en ajoutant une hypothèse d'équité ?

1.  $\Box(b \Rightarrow \diamond b)$
2.  $aM b$
3.  $\diamond \Box c$
4.  $\Box \diamond a \Rightarrow \Box \diamond \neg b$



**Exercice 7:***Comparaison de formules*

Comparer les formules suivantes. Est-ce qu'elles sont équivalentes? Est-ce que l'une implique l'autre?

1.  $\Box\Box\varphi$  et  $\Box\varphi$
2.  $\Diamond\Diamond\varphi$  et  $\Diamond\varphi$
3.  $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$  et  $\Diamond(\varphi \wedge \psi)$
4.  $\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$  et  $\Diamond(\varphi \vee \psi)$
5.  $\Diamond\Box\Diamond\varphi$  et  $\Diamond\Box\varphi$
6.  $\Diamond\Box\Diamond\varphi$  et  $\Box\Diamond\varphi$
7.  $\Box(\Diamond p \wedge \Diamond q)$  et  $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$ .
8.  $\Diamond(\Box p \wedge \Box q)$  et  $\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q$ .
9.  $\Box(\Diamond p \vee \Diamond q)$  et  $\Box\Diamond p \vee \Box\Diamond q$ .
10.  $\Diamond(\Box p \vee \Box q)$  et  $\Diamond\Box p \vee \Diamond\Box q$ .
11.  $\Box\Diamond(p \wedge q)$  et  $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$ .
12.  $\Box\Diamond(p \vee q)$  et  $\Box\Diamond p \vee \Box\Diamond q$ .
13.  $\Diamond\Box(p \wedge q)$  et  $\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q$ .
14.  $\Diamond\Box(p \vee q)$  et  $\Diamond\Box p \vee \Diamond\Box q$ .
15.  $q\mathcal{M}\Diamond p$  et  $\Diamond p$ .
16.  $\Box q \vee \Box(\neg p)$  et  $(\Diamond p) \Rightarrow \Box q$ .

**Exercice 8:***Formules fermées*

Une formule  $\varphi$  de LTL est dite fermée par préfixe si pour toute suite  $x$ , et pour toute suite finie  $z$ , si  $x \models \varphi$  alors  $zx \models \varphi$ . Une formule  $\varphi$  de LTL est dite fermée par coupure si pour toute suite  $x$ , et pour tout entier  $i$ , si  $x \models \varphi$  alors  $x, i \models \varphi$ . Soient  $p, q$  formules d'état. Dire, pour chacune des formules suivantes, se elle est fermée par préfixe ou/et par coupure.

- |                     |  |
|---------------------|--|
| 1. $\Box p$         | 4. $\Diamond\Box p$                            |
| 2. $\Diamond p$     |  |
| 3. $\Box\Diamond p$ | 5. $\Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond q$ |