

TD de Logique n° 9

Calcul des prédicats de Gentzen

Exercice 1 (Quelques dérivations dans \mathcal{G})

Prouvez les séquents suivants dans \mathcal{G} :

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \vdash Q(a) \quad (1)$$

$$\forall xP(x) \vdash \exists xP(x) \quad (2)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists xP(x) \quad (3)$$

$$\exists x\forall yP(x, y) \vdash \forall y\exists xP(x, y) \quad (4)$$

$$\forall x(P \vee Q(x)) \vdash P \vee \forall xQ(x) \quad (5)$$

$$\forall x\forall yP(x, y) \vdash \forall x\forall yP(y, x) \quad (6)$$

$$\vdash \exists x(P(f(x)) \rightarrow P(x)) \quad (7)$$

$$\vdash \exists x\exists y(P(x, f(y)) \rightarrow P(f(x), y)) \quad (8)$$

$$P(0), \forall x(P(x) \rightarrow I(s(x))), \forall x(I(x) \rightarrow P(s(x))) \vdash I(s(s(0))) \quad (9)$$

$$\forall xP(0, x, x), \forall x\forall y\forall z(P(x, y, z) \rightarrow P(x, s(y), s(z))), \\ \forall x\forall y\forall z(P(x, y, z) \rightarrow P(y, x, z)) \vdash \forall xP(x, 0, x) \quad (10)$$

Quelles réciproques vous paraissent valides ? Lesquelles sont seulement satisfaisables ?

Exercice 2 L'ordre des règles est-il important dans le système \mathcal{G} des prédicats ? Trouvez des exemples dans l'exercice précédent.

Exercice 3 Que pouvez-vous dire du séquent $\vdash \exists x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow P(g(x))$?

Exercice 4 (Réversibilité)

Montrez que pour chaque règle de quantificateur du système \mathcal{G} , une interprétation est un modèle pour la formule associée au séquent conclusion si et seulement si elle est un modèle pour la formule associée à la prémisse.