Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2011-2012

TD de Logique n° 8

Calcul des prédicats. Sémantique

Exercice 1 (Sémantique) Montrez que :

1. $\exists y\ \forall x\ p(y,x) \quad \models \quad \forall x\ \exists y\ p(y,x)$
2. $\forall x\ \exists y\ p(y,x) \quad \not\models \quad \exists y\ \forall x\ p(y,x)$
3. $\neg(\forall x\ A) \quad \equiv \quad \exists x\ (\neg A)$
4. $(\exists x\ A) \vee B \quad \equiv \quad \exists x\ (A \vee B)$ si $x \notin VI(B)$.
5. $\forall x\ (A \vee B) \quad \not\equiv \quad (\forall x\ A) \vee (\forall x\ B), \qquad \exists x\ (A \wedge B) \quad \not\equiv \quad (\exists x\ A) \wedge (\exists x\ B)$

Exercice 2 (Déduction naturelle dans le calcul des prédicats) Montrez dans DN_{pred} les séquents suivants :

1. $q(z) \wedge \exists x.p(x) \vdash \exists x.(q(z) \wedge q(x))$
2. $\forall x.(p(x) \to q(z)) \vdash (\exists x.p(x)) \to q(z)$
3. $\exists x.(p(x) \to q(x)) \vdash (\forall x.p(x)) \to (\exists x.q(x))$

Exercice 3 Soit Σ la signature avec $\Sigma_P = \{\, p/2, q/1 \,\}$ et $\Sigma_F = \{\, a/0, f/1, g/2 \,\}$.
Soit $\mathcal{I}$ une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(f)(n) := n+1$, $\mathcal{I}(p)(n,m) :\Leftrightarrow (n = m)$. Pour chacun des ensemble de formules T suivants, complétez $\mathcal{I}$ de deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de T.

1. $T_1 = \{\, \forall x \forall y (p(g(x,y), g(y,x))) \,\}$;
2. $T_2 = \{\, \exists x(q(x)), \exists x(\neg q(x)), \forall x(q(x) \to q(f(f(x)))) \,\}$;
3. $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{\, \forall x \forall y (q(x) \wedge \neg q(y) \to q(g(x,y)) \,\}$;
4. $T_4 = T_1 \cup \big\{\, \forall x \big[q(x) \leftrightarrow \big(\neg p(x,a) \wedge \neg p(x, f(a)) \wedge \forall y \forall z (p(x, g(y,z)) \to (p(x,y) \vee p(x,z)))\big)\big] \,\big\}$.