Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2011-2012

TD de Logique n^o 7

Calcul des prédicats. Syntaxe et Sémantique

Exercice 1 (Formalisation)
En utilisant les symboles de prédicat suivants

$A(x)$	« x est anglais »
$H(x, y)$	« x hait y »
$C(x, y)$	« x connaît y »

et les symboles de fonction suivants

$e(x)$	dénote le pire ennemi de x
n	dénote Napoléon

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. Tout anglais hait son pire ennemi.
2. Napoléon connaît son pire ennemi.
3. Celui qui connaît son pire ennemi ne le hait pas.
4. Personne ne connaît le pire ennemi de Napoléon.
5. Le pire ennemi de Napoléon est anglais.
6. Quiconque hait quelqu'un, ne hait pas son pire ennemi.
7. Quiconque est anglais hait tout ceux qui connaissent Napoléon.

Exercice 2 (Substitutions)

1. Soit $t = p(x, y)$. On considère les substitutions $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a)\}$ et $\sigma_2 = \{y \mapsto f(x)\}$.
   - Calculez : $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_1(\sigma_2(t))$ et $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
   - Calculez : $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$. (Rappel : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour toute variable x).
   - La composition de substitution se comporte-t-elle bien vis à vis des termes ? En particulier, a-t-on $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(t) = \sigma_1(\sigma_2(t))$ pour le t précédent ?
2. Soit $\sigma_1 = \{x \mapsto y\}$ et soit $\sigma_2 = \{y \mapsto x\}$. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
3. Soit s le terme $r(x, y, z)$ et les substitutions

$$\begin{array}{lcl} \sigma_1 & = & \{x \mapsto f(a),\ y \mapsto f(x),\ z \mapsto b\} \\ \sigma_2 & = & \{x \mapsto f(z),\ y \mapsto f(b),\ z \mapsto b\} \\ \sigma_3 & = & \{w \mapsto z,\ z \mapsto b\} \circ \{x \mapsto f(w),\ y \mapsto a\} \end{array}$$

   Calculer $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ et $\sigma_3(s)$.

Exercice 3 (Variables libres, liées)

- Dans la formule suivante, indiquez pour chaque variable, si elle est libre ou liée, et le cas échéant à quel connecteur elle est liée.

$$F = \forall x\ [\exists y\ (p(x, y)) \wedge \exists x\ (q(y, x) \wedge \forall y\ r(y, y))]$$

- Appliquez à F la substitution $\sigma = \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(f(a))\}$.
- Transformez F pour la rendre plus lisible.

Exercice 4 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacune des formules suivantes dites quelles sont celles qui sont satisfaisables, valides, contradictoires (i.e. non satisfaisables) et celles qui ont un modèle :

(1)	$\forall x.\ (p(x) \vee \neg p(x))$	(3)	$\forall x.\ \forall y.\ (p(x) \leftrightarrow \neg p(y))$	(5)	$\neg p(x) \wedge (\exists x.\ p(x))$
(2)	$\forall x.\ (p(x) \to p(z))$	(4)	$\forall x.\ (p(x) \vee q(x))$	(6)	$\exists x.\ (p(x) \to p(a) \wedge p(b))$

Pour chaque formule qui n'est ni valide ni contradictoire, prouvez-le.

Exercice 5 (Indépendance) Soient les formules :

1. $F_1 \;=\; \forall x.\ p(x, x)$
2. $F_2 \;=\; \forall x.\ \forall y.\ (p(x, y) \to p(y, x))$
3. $F_3 \;=\; \forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \to p(x, z))$

Montrez qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?