

TD de Logique n° 6

## Résolution

**Exercice 1** Prouver que les règles suivantes sont admissibles dans le système  $G$ .

1.

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}{\Delta \vdash B \vee A, \Gamma}$$

2.

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}{\Delta \vdash B \wedge A, \Gamma}$$

3.

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma \quad \Delta, C \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \rightarrow C \vdash \Gamma}$$

**Exercice 2** Déterminer lesquelles de ces formules sont en forme normale conjonctive (FNC) ou en forme normale disjonctive (FND) :

1.  $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\neg \mathbf{p}) \wedge (\neg \mathbf{r} \vee \mathbf{q})$
2.  $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) \vee (\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vee \mathbf{r}$
3.  $(\mathbf{r} \vee \mathbf{p}) \wedge (\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{r})) \wedge \mathbf{q}$
4.  $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \top \vee (\neg \mathbf{r} \wedge \mathbf{s})$
5.  $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$
6.  $(\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}) \vee (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$
7.  $\mathbf{r} \vee (\neg \mathbf{q}) \vee \mathbf{p}$

**Exercice 3** Mettre les formules suivantes en FND et FNC. On appliquera dans un premier temps les équivalences, puis on écrira les tables de vérité pour en déduire les deux formes normales. Comparer les résultats.

1.  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
2.  $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$
3.  $(\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$
4.  $(\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$
5.  $(A \text{ faire chez vous})(\mathbf{p} \rightarrow \neg(\mathbf{q} \vee \mathbf{r})) \wedge (\neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p})$

**Exercice 4** Montrer que toute formule est équivalente à une formule en FND et à une formule en FNC.

**Exercice 5** Montrer par résolution ou par réfutation les propositions suivantes

1.  $\vdash \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$
2.  $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}), \mathbf{p} \vdash \mathbf{q}$
3.  $(\neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}), (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vdash \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{r}$
4.  $\vdash ((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p}$

**Exercice 6** Résolution

1. Pour un ensemble de clauses  $\Delta$  contenant la lettre propositionnelle  $\mathbf{p}$ , donner un ensemble de clauses  $\Delta'$  équivalent à  $(\bigvee \Delta) \wedge \neg \mathbf{p}$  ne contenant pas la lettre  $\mathbf{p}$ .
2. (À faire chez vous) Montrer que pour une clause  $C$ , si  $\Delta' \vdash C$  alors ou bien  $\Delta \vdash C$  ou  $\Delta \vdash C \vee \mathbf{p}$
3. Montrer que la résolution est complète pour la réfutation, c'est à dire que si  $\Delta$  est insatisfaisable, alors  $\Delta \vdash_R \perp$ . On procédera par contraposition, et par récurrence sur le nombre de lettres propositionnelles dans  $\Delta$ .