

TD de Logique n° 4

Déduction Naturelle

Déduction Naturelle

Exercice 1 En utilisant $\vdash_{DN_{prop}}$, montrez les propriétés suivantes :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. (*À faire chez vous*) $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. (*À faire chez vous*) $\vdash ((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{q})) \rightarrow \neg \mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q})$
5. $\vdash (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
6. $\vdash (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ (*On pourra s'aider du tiers exclus, vu en cours*)
7. (*À faire chez vous*) $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$

Équivalence entre déduction naturelle et système de Hilbert

Notons $\mathbf{F}_{\neg, \vee}$ l'ensemble des formules propositionnelles construites à partir des seuls connecteurs \neg et \vee et $DN_{\neg, \vee}$ le sous-système de DN_{prop} pour l'ensemble $\mathbf{F}_{\neg, \vee}$.

On va travailler dans cette partie sur $DN_{\neg, \vee}$ et H_{prop} .

Exercice 2

1. Donnez une dérivation du séquent $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vdash_{DN_{\neg, \vee}} \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$.
2. Transformez cette dérivation en une dérivation dans le système H_{prop} .
3. (*À faire chez vous*) Donnez une dérivation du séquent $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \vdash_{DN_{\neg, \vee}} \mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.
4. (*À faire chez vous*) Transformez cette dérivation en une dérivation dans le système H_{prop} .
5. Montrez que pour toute formule $A \in \mathbf{F}_{\neg, \vee}$ et tout ensemble fini Δ de formules de $\mathbf{F}_{\neg, \vee}$:
si $\Delta \vdash_{DN_{\neg, \vee}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
6. (*À faire chez vous*) Donnez une dérivation du séquent $\vdash_{DN_{\neg, \vee}} \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{p}$.
7. (*À faire chez vous*) Montrez l'équivalence des systèmes DN_{prop} et H_{prop} , *i.e.* montrez que pour toute formule A et tout ensemble de formule Δ , on a :
 - si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
 - si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.