

TD de Logique n° 3

Systèmes à la Hilbert

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication « \rightarrow » est associative à droite ; par exemple, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ signifie $\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$.

N'oubliez pas : un théorème, une fois prouvé, peut être utilisé comme axiome dans les démonstrations suivantes.

Exercice 1 Donnez des dérivations des faits suivants :

1. $\vdash_{H_{\rightarrow}} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$
2. $\vdash_{H_{\rightarrow}} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$

Exercice 2 Dérivez les faits suivants en vous aidant du théorème de la déduction :

1. $\vdash_{H_{\rightarrow}} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$
2. $\vdash_{H_{\rightarrow}} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$

Exercice 3

1. Soit H_{\rightarrow}^+ le système H_{\rightarrow} augmenté de la règle suivante :

$$\frac{A \rightarrow B \rightarrow C}{B \rightarrow A \rightarrow C}$$

Montrez que $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} P$ si et seulement si $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}^+} P$.

2. Dédisez-en que $\vdash_{H_{\rightarrow}} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$.
3. Montrez aussi que $\vdash_{H_{\rightarrow}} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$, sans utiliser le théorème de la déduction.

Exercice 4

1. Montrez que $\vdash_{H_{\text{prop}}} ((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?
2. Montrez que $\vdash_{H_{\text{prop}}} \mathbf{p} \rightarrow \neg\neg\mathbf{p}$.
3. Montrez que $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \neg\mathbf{p}$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?
4. Montrez que $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$. Qu'en est-il de la propriété réciproque ?