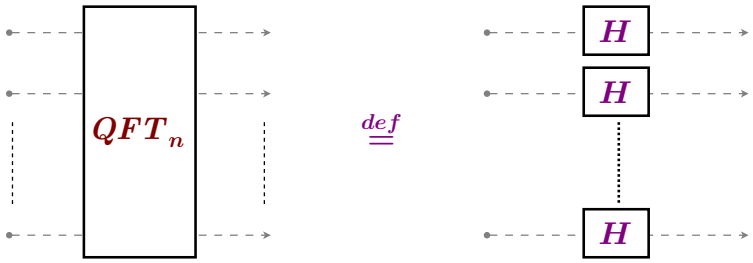
Informatique Quantique

Frédéric Magniez

Cours 4 :
Transformée de Fourier quantique
Algorithmes de Shor

Rappels



$$QFT_n|x\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_y (-1)^{x \cdot y} |y\rangle$$

avec $x \cdot y = \sum_i x_i y_i \mod 2$

Transformée de Fourier discrète

- Base de dirac de l'espace des fonctions $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{C}$

$$(\delta_x)_{x\in\{0,1\}^n} : f = \sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)\delta_x$$

- Base de Fourier de l'espace des fonctions $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{C}$

$$(\chi_y)_{y\in\{0,1\}^n}, \chi_y(x) = (-1)^{x\cdot y} :$$

$$\chi_y(x \oplus x') = \chi_y(x)\chi_y(x')$$

$$f = \frac{1}{2^n} \sum_{y\in\{0,1\}^n} \hat{f}(y)\chi_y,\ \hat{f}(y) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \chi_y(x)f(x)$$

Analogue quantique

- Etat normé $\leftrightarrow$ Fonction normée de L_2

$$|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x|x\rangle \leftrightarrow f : x \mapsto \alpha_x$$

- Circuit quantique de taille n contre $n2^n$ en classique

$$QFT_n : |x\rangle \mapsto \frac{1}{2^{n/2}} \sum_y (-1)^{x\cdot y}|y\rangle$$

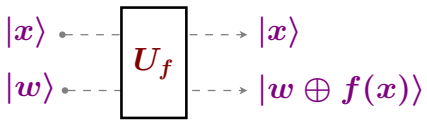
$$|f\rangle = \sum_x f(x)|x\rangle \mapsto \frac{1}{2^{n/2}} \sum_y \hat{f}(y)|y\rangle$$

Problème

- Entrée : $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ telle que

$$\exists s \in \{0,1\}^n : \forall x \neq y,\ f(x) = f(y) \iff y = x \oplus s$$

- Sortie : s
- Contrainte : f est une boîte noire

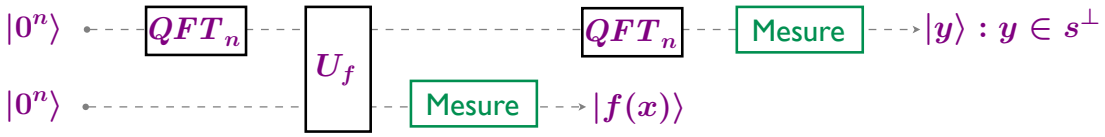


Complexité en requêtes

- Probabiliste : $2^{\Omega(n)}$
- Quantique : $O(n)$

Idée

Utiliser QFT pour rechercher la période s.



Initialisation : $|0^n\rangle|0^n\rangle$

Parallélisation : $\frac{1}{2^{n/2}}\sum_x |x\rangle|0^n\rangle$

Appel de f : $\frac{1}{2^{n/2}}\sum_x |x\rangle|f(x)\rangle$

Mesure partielle : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |x \oplus s\rangle)|f(x)\rangle$

Interférences : $\frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sum_y ((-1)^{x\cdot y} + (-1)^{(x\oplus s)\cdot y})|y\rangle|f(x)\rangle$

$\frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sum_y (-1)^{x\cdot y}(1 + (-1)^{s\cdot y})|y\rangle|f(x)\rangle$

$\frac{1}{2^{(n-1)/2}}\sum_{u:s\cdot y=0} (-1)^{x\cdot y}|y\rangle|f(x)\rangle$

Création du système

- Après $n+k$ itérations : $y_1, y_2, \ldots, y_{n+k} \in s^\perp$
- Si $s = 0^n$ les y sont de rang n avec proba $\geq 1 - \frac{1}{2^k}$
- Si $s \neq 0^n$ les y sont de rang $n-1$ avec proba $\geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$
- Système :

$$\begin{cases} y_1 \cdot t = 0 \\ y_2 \cdot t = 0 \\ \vdots \\ y_{n+k} \cdot t = 0 \end{cases}$$

Solutions du système : 0^n et s !

Temps total : $O(n^3)$

Lemme

- Soient G un groupe fini et H un sous-groupe strict de G, alors

$$\Pr_{x \in G}[x \notin H] \geq \frac{1}{2}$$

Lemme

- Soit G un groupe commutatif fini. Alors G a au plus $|G|$ sous-groupes stricts.

Théorème

- Soit G un groupe commutatif fini, alors

$$\Pr_{x_1, x_2, \ldots, x_l \in G}[\langle x_1, x_2, \ldots, x_l \rangle = G] \geq 1 - \frac{|G|}{2^l}$$

Preuve

- Soit H un sous-groupe strict de G, alors

$$\Pr_{x_1, x_2, \ldots, x_l \in G}[\langle x_1, x_2, \ldots, x_l \rangle \leq H] \leq \frac{1}{2^l}$$

- G a au plus $|G|$ sous-groupes stricts donc

$$\Pr_{x_1, x_2, \ldots, x_l \in G}[\exists H < G : \langle x_1, x_2, \ldots, x_l \rangle \leq H] \leq \frac{|G|}{2^l}$$

Exercice 1 : sous-groupe caché

- Refaire l'algorithme de Simon lorsque

$$f(x) = f(y) \iff y - x \in H$$

où H est un sous-groupe inconnu de $(\{0,1\}^n, \oplus)$

- Montrer la formule $\sum_{h \in H} (-1)^{h \cdot y} = \begin{cases} |H|, & y \in H^\perp \\ 0, & y \notin H^\perp \end{cases}$
- En déduire qu'on peut trouver des générateurs de H en temps $O(n^3)$

Exercice 2 : translation cachée

- Soient deux bijections $f, g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ telles que

$$\exists u \in \{0,1\}^n : \forall x \in \{0,1\}^n,\ f(x) = g(x \oplus u)$$

- Montrer qu'on peut trouver u en temps $O(n^3)$

  Indication : considérer la fonction

$$F(x, b) = \begin{cases} f(x), & b = 0 \\ g(x), & b = 1 \end{cases}$$

Groupe abélien quelconque

- Trouver la période d'une fonction *quelconque* se résout en temps quantique $\mathrm{poly}(\log|G|)$
- Calcul de l'ordre se résoud en temps quantique polynomial

  Entrée : $N, a \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{pgcd}(a, N) = 1$

  Sortie : le plus petit entier $r \neq 0$ tel que $a^r = 1 \mod N$

Factorisation

- Entrée : $N \in \mathbb{N}$
- Sortie : un diviseur non trivial de N

Réduction : Factorisation $\leq_R$ Calcul de l'ordre

- Vérifier que $\mathrm{pgcd}(a, N) = 1$
- Calculer l'ordre r de $a \mod N$
- Recommencer si r impair ou $a^{r/2} = -1 \mod N$
- Sinon $(a^{r/2} - 1)(a^{r/2} + 1) = 0 \mod N$
- Renvoyer $\mathrm{pgcd}(a^{r/2} \pm 1, N)$

Transformée de Fourier discrète

- Base de Fourier de l'espace des fonctions $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$

$$(\chi_y)_{y\in\mathbb{Z}_N}, \chi_y(x) = \omega_N^{xy} \quad \text{avec} \quad \omega_N = e^{2i\pi/N}$$

$$\chi_y(x +_{\mathrm{mod}\, N} x') = \chi_y(x)\chi_y(x')$$

$$f = \frac{1}{N}\sum_{y\in\mathbb{Z}_N} \hat{f}(y)\chi_y, \ \hat{f}(y) = \sum_{x\in\mathbb{Z}_N} \overline{\chi_y(x)} f(x)$$

Analogue quantique

- Etat normé $\leftrightarrow$ Fonction normée de L_2

$$|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle \leftrightarrow f : x \mapsto \alpha_x$$

- Circuit quantique de taille $(\log N)^2$ contre $N \log N$ en classique

$$QFT_{\mathbb{Z}_N} : |x\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_y \omega_N^{xy}|y\rangle$$

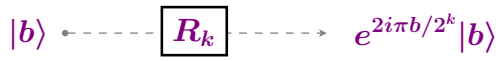
$$|f\rangle = \sum_x f(x)|x\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_y \overline{\hat{f}(y)}|y\rangle$$

car on n'a pas conjugué ω par commodité

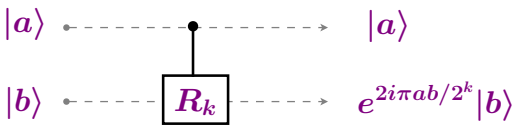
Portes utilisées

- Porte Hadamard

- Porte de décalage de phase



- Porte de déphasage controlée



Ecriture binaire

- Représentation : $x \in \mathbb{Z}_{2^n} \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{Z}_2)^n \qquad x_i \in \{0,1\}$

$$\frac{x}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{-i} = 0, x_1 x_2 \ldots x_n$$

- Simplification

$$\omega_N^{2^k x} = e^{(2i\pi)0.x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_n}$$

Transformée de Fourier en écriture binaire

- Exercice : Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} \omega_N^{xy}|y\rangle = \frac{1}{2^{n/2}}(|0\rangle + \omega_N^{2^{n-1}x}|1\rangle)(|0\rangle + \omega_N^{2^{n-2}x}|1\rangle)\ldots(|0\rangle + \omega_N^{x}|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}}(|0\rangle + e^{(2i\pi)0.x_n}|1\rangle)(|0\rangle + e^{(2i\pi)0.x_{n-1}x_n}|1\rangle)\ldots(|0\rangle + e^{(2i\pi)0.x_1x_2\ldots x_n}|1\rangle)$$

écriture binaire

Cas n=1

- Exercice : Etant donné x_1, donner le circuit qui produit

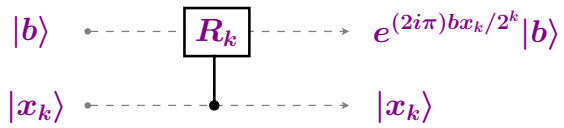
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{(2i\pi)0.x_1}|1\rangle)$$

Cas n=2

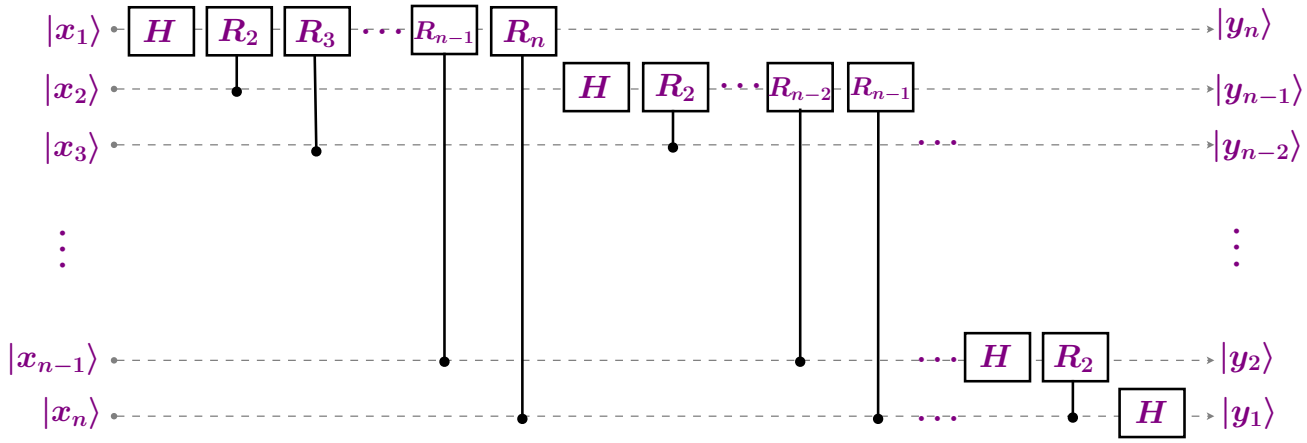
- Exercice : Etant donnés x_1 et x_2, donner le circuit qui produit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{(2i\pi)0.x_2}|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{(2i\pi)0.x_1x_2}|1\rangle)$$

Rappel



Circuit complet



$$|y_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{(2\pi i)0.x_1x_2\ldots x_k}|1\rangle)$$

STOP Il faut inverser les qubits en sortie !

Théorème

- Il existe une famille uniforme de circuits de taille $(\log N)^2$ simulant exactement $QFT_{\mathbb{Z}_N}$ lorsque les facteurs premiers de N sont bornés

Théorème

- Il existe une famille uniforme de circuits de taille $(\log N)^3$ simulant exactement $QFT_{\mathbb{Z}_N}$ pour tout N

Théorème

- Il existe une famille uniforme de circuits de taille

$$O(\log N \log((\log N)/\varepsilon) + \log^2(1/\varepsilon))$$

simulant $QFT_{\mathbb{Z}_N}$ avec précision $\varepsilon > 0$

Problème

- Entrée : $N, a \in \mathbb{N}$ tels que $\text{pgcd}(a, N) = 1$
- Sortie : le plus petit entier $r \neq 0$ tel que $a^r = 1 \mod N$

Encodage

- Groupe des inversibles : $\mathbb{Z}_N^* = \{x \in \mathbb{Z}_N : \text{pgcd}(x, N) = 1\}$
- Fonction puissance : $f_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_N^*,\ x \mapsto a^x$

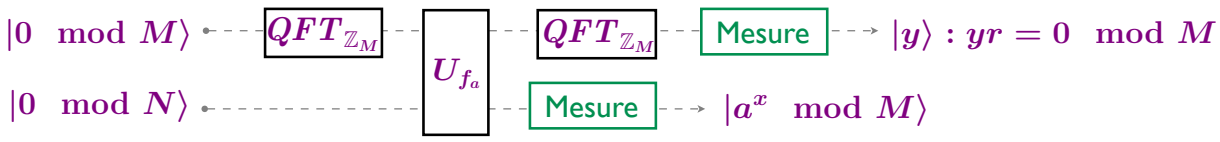
Propriétés

- f_a est périodique de période r
- Si $f_a(x) = f_a(y)$ alors $r|(x - y)$

Obstacle

- On souhaiterait connaître un multiple M de r pour utiliser l'algorithme de recherche de période dans $\mathbb{Z}_M$ à l'aide de $QFT_{\mathbb{Z}_M}$
- Solution : prendre *M* suffisamment grand pour que *M* soit *à peu près* un multiple de *r*

  Dans la suite on suppose que *M* est un multiple de *r*



Initialisation : $|0 \mod M\rangle|0 \mod N\rangle$

Parallélisation : $\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} |x\rangle|0\rangle$

Appel de f_a: $\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} |x\rangle|a^x \mod N\rangle \qquad 0 \leq x < r$

Mesure partielle : $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{M/r-1} |x + jr\rangle|a^x \mod N\rangle$

Interférences : $\frac{\sqrt{r}}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \omega_M^{xy} \Big(\sum_{j=0}^{M/r-1} (\omega_M^{ry})^j \Big) |y\rangle|a^x \mod N\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{xk} |kM/r\rangle|a^x \mod N\rangle$$

STOP $y \cdot s = 0 \leftrightarrow yr = 0 \mod M : y = kM/r,\ k = 0, \ldots, r-1$

Bilan

- Avec probabilité uniforme sur $k = 0, \ldots, r-1$ on observe $y = kM/r$
- La décomposition en fraction irréductible de y/M renvoie t/z telle que $z|r$

Théorème

$$\Pr_{k,k'=0,\ldots,r-1}[\text{ppcm}(z, z') = r] \geq 0.4$$

Conclusion

- Si $r|M$, alors avec deux exécutions de l'algorithme de Shor, on obtient un facteur non trivial de N avec probabilité $\Omega(1)$

Remarque

- On peut vérifier qu'on a trouver le bon ordre car

$$(r'|r \text{ et } a^{r'} = 1) \implies r' = r$$

Choix de M

- Contrainte : $N^2 < M < 2N^2$
- Pour simplifier la transformée de Fourier : $M = 2^m$

Même algorithme...

- Après mesure

  Précédemment

  $$\Pr_y[yr = 0 \mod M] = 1$$

  Maintenant

  $$\Pr_y[|yr|_{\mod M} \leq r/2] \geq \tfrac{1}{3}$$

Analyse

- Si $|yr|_{\mod M} \leq r/2$, alors il existe une unique fraction $\frac{k}{r}$ telle que

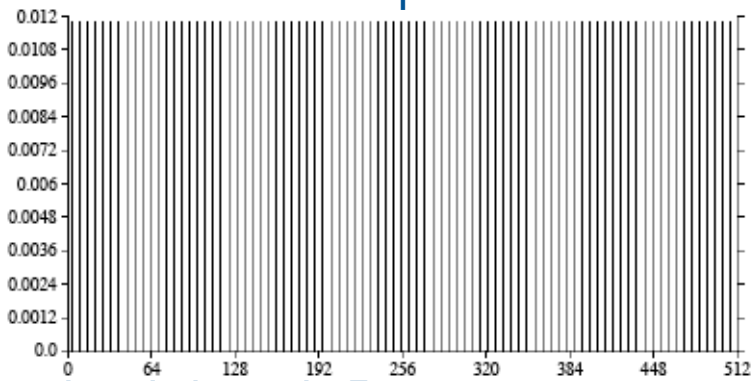
$$-\tfrac{1}{2M} \leq \frac{y}{M} - \frac{k}{r} \leq \tfrac{1}{2M}$$

- L'algorithme des fractions continues trouve la fraction $\frac{k}{r}$ en temps $O(\log^3 N)$
- Conclusion identique au cas $r|M$:

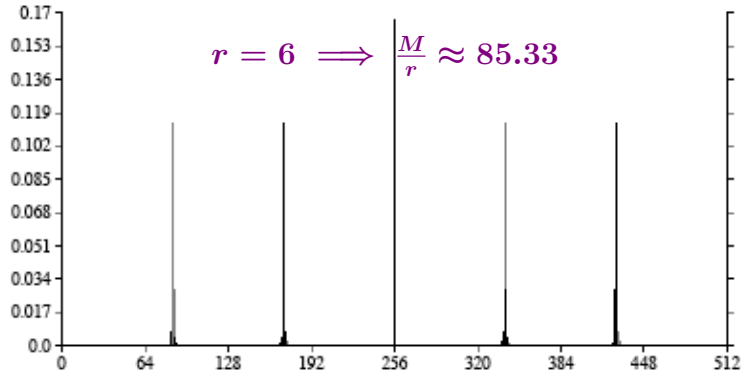
  Calculer le ppcm de toutes les paires d'un échantillon de taille $O(1)$

  Le plus petit des candidats r' tq $a^{r'} = 1 \mod N$ est bien r avec *grande* probabilité

Mesure dans la base classique



Mesure dans la base de Fourier



Lemme

- Si p est premier alors $\mathbb{Z}_p^*$ est cyclique de taille $p-1$

Problème

- Entrées

  Un entier p premier et un générateur g de $\mathbb{Z}_p^*$:

  $$\mathbb{Z}_p^* = \{g^x \mod p : x = 0, 1, \ldots, p-2\}$$

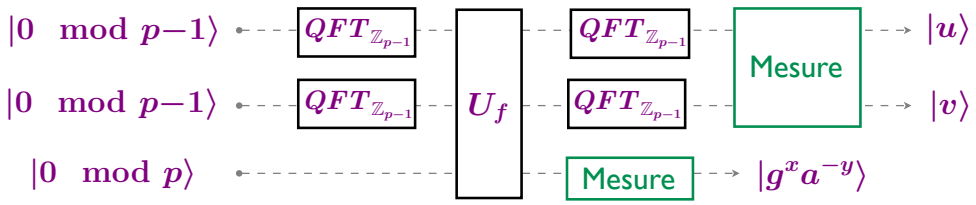
  Un élément $a \in \mathbb{Z}_p^*$
- Sortie : l'entier $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ tel que $a = g^r \mod p$

Application

- Algorithme de Diffie-Hellman :

  Alternative à RSA sur une courbe elliptique

  clé de 160 bits $\approx$ factoriser 1024 bits



- Justifier qu'on peut supposer avoir un circuit réalisant exactement $QFT_{\mathbb{Z}_{p-1}}$
- On pose $f(x,y) = g^x a^{-y}$
- Montrer que f satisfait
$$f(x,y) = f(x',y') \iff \exists k,\ (x',y') = (x,y) + k(r,1)$$
- Calculer l'état du système après la première mesure partielle
- Calculer l'état du système avant la dernière mesure
- Montrer que
$$\Pr_{u,v}[ur + v = 0 \mod p-1] = 1$$
- Conclure

Problème du sous-groupe caché

- Entrée : G un groupe et f une fonction sur G telle que, pour un sous-groupe $H \leq G$ inconnu,
$$f(x) = f(y) \iff x^{-1}y \in H$$
- Sortie : un ensemble de générateurs de H

Exemples

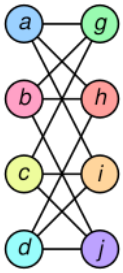
- Problème de Simon : $G = (\mathbb{Z}_2)^n,\ H = \{0, s\}$
- Factorisation : $G = \mathbb{Z},\ H = r\mathbb{Z}$
- Logarithme discret : $G = \mathbb{Z}^2,\ H = \{(rx, x) : x \in \mathbb{Z}\}$
- Equation de Pell : $G = \mathbb{R}$
- Isomorphisme de graphe : $G = \mathcal{S}_n$

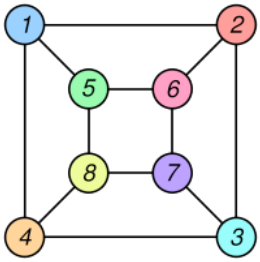
Théorème : Algorithmes quantiques connus pour le pb du ss-groupe caché

- Groupe abélien de type fini : $\mathrm{poly}(\log|G|)$
- Groupe quelconque : $\mathrm{poly}(\log|G|)$ requêtes, temps $2^{O(\log|G|)}$

Problème

- Entrée : 2 graphes G et H sur n sommets
- Sortie : Une bijection f qui envoie les sommets de G sur ceux de H, telle que les 2 graphes coïncident
- Application : chimie moléculaire, conception de circuits





G	H
a	1
b	6
c	8
d	3
e	5
f	2
g	4
h	7

Réduction au pb du sous-groupe caché

- Groupe : ensemble $\mathcal{S}_{2n}$ des bijections sur les sommets de G et H
- Fonction : $\pi \in \mathcal{S}_{2n} \mapsto \pi(G \cup H)$
- Sous-groupe caché (cas des graphes rigides) :

  $\{\mathrm{Id}\}$ si non-isomorphes

  $\{\mathrm{Id}, \pi\} \quad : \quad \pi(G) = H,\ \pi(H) = G$ sinon

Problèmes sans structure

- Algorithme de Grover 1996

Problèmes avec une structure algébrique

- Algorithme de Shor 1994

Problèmes très structurés

- Les algorithmes classiques sont optimaux !

Problème un peu structurés

- Algorithme d'Ambainis 2003

  utilisation de marches quantiques (analogues des marches aléatoires) pour améliorer l'implémentation de l'opérateur de Grover

- Exemples

  Element Distinctness : Grover$^2 \rightarrow O(N^{3/4})$, Ambainis $\rightarrow O(N^{2/3})$ ← optimal

  Triangle free : Grover$^2 \rightarrow O(N^{3/2})$, Ambainis$^2 \rightarrow O(N^{1.3})$ ← *sans doute* non optimal...