

MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

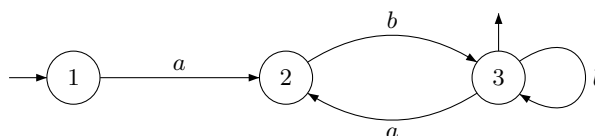
Olivier Carton, Jean-Éric Pin

Partiel du 2 décembre 2013. Durée: 1h 30, notes de cours autorisées

Avertissement : On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Partie 1. Étude d'un langage.

Question 1. Soit $A = \{a, b\}$ et soit L le langage de A^* reconnu par l'automate \mathcal{A} représenté ci-dessous



Question 2. Vérifier que \mathcal{A} est l'automate minimal de L .

Question 3. Donner une expression rationnelle pour L .

Question 4. Calculer le monoïde syntactique M de L . On donnera la liste des éléments et des relations permettant de définir M (vous devriez trouver 6 éléments, en comptant l'élément neutre).

Question 5. Donner la liste des idempotents de M .

Question 6. Déterminer la structure en \mathcal{D} -classes de M et dessiner les diagrammes boîtes à œufs.

Question 7. Le langage L est-il sans-étoile? Justifier votre réponse.

Question 8. Soit e un idempotent d'un semigroupe S . Montrer que l'ensemble $eSe = \{exe \mid x \in S\}$ est un sous-semigroupe de S , qui est en fait un monoïde de neutre e .

Question 9. Calculer eMe pour chaque idempotent e de M . Vérifier que si $e \neq 1$, eMe est un monoïde idempotent et commutatif.

Partie 2. Logique

On s'intéresse au fragment $\mathbf{FO}_1[\min, \max, P, S, (\mathbf{a})_{a \in A}]$ de la logique du premier ordre sur les mots défini de la façon suivante: outre les prédicats \mathbf{a} habituels, pour chaque lettre $a \in A$, on a aussi deux symboles de constante \min et \max et deux symboles de fonction P et S . Pour un mot $u = a_1 \cdots a_n$, le domaine d'interprétation est l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Le symbole \min est interprété par 1 et le symbole \max par n . Les symboles P et S sont respectivement interprétés comme les fonctions prédécesseur et successeur. Ainsi $Px = x - 1$ et $Sx = x + 1$. Par convention $P \min = \min$ et $S \max = \max$. Enfin le fragment \mathbf{FO}_1 est celui dans lequel une seule variable est autorisée.

Question 10. Quel est le langage de A^+ représenté par les formules suivantes:

- (1) $\exists x \mathbf{a}SSx$
- (2) $\mathbf{a} \min \wedge \mathbf{a}P \max$

Question 11. Trouver un énoncé de ce fragment définissant le langage L de la première partie.

Question 12. Montrer que tout langage défini par ce fragment logique est nécessairement sans étoile.

Question 13. Donner une description des langages définissables par ce fragment et justifier votre description.

Question 14. (Difficile) Soit M le monoïde syntactique d'un langage expressible dans ce fragment. Montrer que si e est un idempotent différent de 1 de M , alors eMe est un monoïde idempotent et commutatif.

Question 15. (Encore plus difficile) Montrer que si le monoïde syntactique d'un langage de A^+ est apériodique et vérifie la condition de la question précédente, alors ce langage est expressible dans le fragment $\mathbf{FO}_1[\min, \max, P, S, (\mathbf{a})_{a \in A}]$.

MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

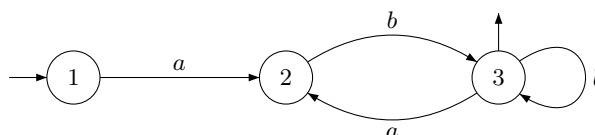
Olivier Carton, Jean-Éric Pin

December 2, 2013. Duration: 1h 45.

Warning : Clearness, accuracy and concision of the writing will be rewarded.

Part 1. Study of a language

Question 1. Let $A = \{a, b\}$ and let L be the language of A^* recognized by the automaton \mathcal{A} :



Question 2. Verify that \mathcal{A} is the minimal automaton of L .

Question 3. Give a rational expression representing L .

Question 4. Compute the syntactic monoid M of L . Give the list of elements and the defining relations of M . (Hint: you should find 6 elements, including the identity).

Question 5. Give the list of all idempotents of M .

Question 6. Give the \mathcal{D} -class structure of M and draw the corresponding egg-box pictures.

Question 7. Is the language L star-free? Justify your answer.

Question 8. Let e be an idempotent of a semigroup S . Show that the set $eSe = \{exe \mid x \in S\}$ is a subsemigroup of S , which is in fact a monoid with identity e .

Question 9. Compute eMe for each idempotent e of M . Verify that if $e \neq 1$, then eMe is an idempotent and commutative monoid.

Partie 2. Logic

We are interested in the fragment $\mathbf{FO}_1[\min, \max, P, S, (\mathbf{a})_{a \in A}]$ of first order logic on words defined as follows: on top of the usual predicates \mathbf{a} , for each letter $a \in A$, one also has two constant symbols \min and \max and two function symbols P and S . For a word $u = a_1 \cdots a_n$, the domain is the set $\{1, \dots, n\}$. The symbol \min is interpreted as 1 and the symbol \max as n . The symbols P and S are respectively interpreted as the predecessor and successor functions. Thus $Px = x - 1$ and $Sx = x + 1$. By convention $P\min = \min$ and $S\max = \max$. Finally the \mathbf{FO}_1 fragment is the one in which only one variable is allowed.

Question 10. What is the language of A^+ represented by the following formulas:

(1) $\exists x \mathbf{a}SSx$

(2) $\mathbf{a} \min \wedge \mathbf{a}P \max$

Question 11. Find a sentence of this fragment defining the language L of the first part.

Question 12. Show that every language defined by this fragment is necessarily star-free.

Question 13. Give a description of the languages definable in this fragment and justify your answer.

Question 14. (Difficult) Let M be the syntactic monoid of a language expressible in this fragment. Show that if e is an idempotent different from the identity of M , then eMe is an idempotent and commutative monoid.

Question 15. (Even more difficult) Show that if the syntactic monoid of a language of A^+ is aperiodic and satisfies the condition of the previous question, then this language is expressible in the fragment $\mathbf{FO}_1[\min, \max, P, S, (\mathbf{a})_{a \in A}]$.