LICENCE O.M.I. - T.D. Séries génératrices

EXERCICE 1 Quelle est la fonction génératrice de la suite de terme général $u_n = 2^n - 7^n$? $\diamondsuit$

EXERCICE 2 Soit $G(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série génératrice .

1) Montrer que

$$\frac{1}{1-z}G(z) = a_0 + (a_0 + a_1)z + \ldots + (\sum_{i=0}^{k} a_i)z^k + \ldots$$

2) Soit $S(z) = \sum_{n\geq 1} H_n z^n$ la série génératrice de la suite $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(n \geq 1)$. Montrer que

$$S(z) = \frac{1}{1-z}\log(\frac{1}{1-z}) \ .$$

3) Montrer que

$$S'(z) = \frac{1}{1-z}S(z) + \frac{1}{(1-z)^2}$$

et en déduire une formule permettant de calculer $\sum_{k=1}^{n-1} H_k$ en fonction de H_n. $\diamondsuit$

EXERCICE 3 On considère le jeu suivant avec un dé à 7 faces. La face "1" rapporte un franc et les six autres faces rapportent deux francs chacune. Une "partie" consiste en une suite ordonnée de lancers du dé. On note a_n le nombre de parties dont le gain final est n francs. On remarque que $a_0 = a_1 = 1$.

Trouver une relation de récurrence sur les a_n, calculer la fonction génératrice des a_n puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n. $\diamondsuit$

EXERCICE 4 Résoudre les relations de récurrence simultanées

$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2}$, avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$,

$v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$, avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. $\diamondsuit$

EXERCICE 5 Les nombres de Fibonacci sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et, pour $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Déterminer la série génératrice de la suite F_{2n} des nombres de Fibonacci d'indice pair. $\diamondsuit$

EXERCICE 6 Résoudre la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + nu_0, \quad \text{avec } u_0 = 1.$$ $\diamondsuit$

EXERCICE 7 Quel est le nombre de façons de faire un total de n avec des jetons de valeur 2 et 3? $\diamondsuit$

EXERCICE 8 Résoudre la relation de récurrence

$$\forall n > 1, \quad u_n = -2nu_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k u_{n-k} \ ,$$

avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, en utilisant les séries génératrices exponentielles. $\diamondsuit$

T.S.V.P.

EXERCICE 9 Soit $A = \{\text{bleu, rouge, vert}\}$ un ensemble de couleurs. Lors d'une partie de Mastermind, on forme des suites de taille n avec ces trois couleurs. On note a_i la i-ième couleur de la solution considérée.

1) On note t_n le nombre de solutions de longueur n, telles que, pour i dans $\{1, \ldots, n-2\}$, on ait $a_i \neq a_{i+2}$.

a) Calculer t_1, t_2 et t_3.

b) Trouver une loi de récurrence pour t_n.

c) En déduire t_n.

2) Soit s_n le nombre de solutions de taille n, telles que, soit $a_i \neq a_{i+2}$, soit $a_i = a_{i+1} = a_{i+2}$, pour $i = 1, \ldots, n-2$.

a) Calculer s_1, s_2, s_3 et s_4.

b) Trouver une loi de récurrence pour s_n.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n$ et en déduire s_n. $\diamondsuit$

EXERCICE 10 Résoudre la relation de récurrence suivante

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n/2^n, \quad \text{avec } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 0. \quad \diamondsuit$$