LICENCE O.M.I. - T.D. Suite Récurrentes

EXERCICE 1 Trouver le terme général de u_n en fonction de u_0 et u_1 pour les relations :
a) $2u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$
b) $u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1}$
c) $u_{n+1} = 2u_n - 5u_{n-1}$

On commencera par la méthode du polynôme caractéristique, puis la méthode des séries génératrices puis la méthode matricielle. ♢

EXERCICE 2 En se ramenant à une formule de récurrence à 2 ou 3 termes calculer u_n pour :

$$u_n = 3\sum_{k=0}^{n-1} u_k + 1 \quad \text{pour } n > 0 \quad \text{et } u_0 = 1$$

♢

EXERCICE 3 Un mot bien parenthésé est soit vide soit de la forme $(a)b$ où a et b sont des mots bien parenthésés. Ce sont des mots sur l'alphabet $A = \{(,)\}$ de longueur paire. Soit u_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. Montrer que

$$u_n = \sum_{p+q=n-1} u_p u_q$$

puis trouver une relation entre $u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ et $u^2(x)$. En déduire u_n. ♢

EXERCICE 4 Trouver les solutions de la relation de récurrence

$$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}, \quad n \geq 3\,,$$

avec les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. ♢

EXERCICE 5 Soit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ et soit

$$\begin{aligned} L &= \{w \in \Sigma^* \,/\, w \text{ n'a pas } ab \text{ comme facteur}\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \,/\, \nexists w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ avec } w = w_1 ab w_2\} \end{aligned}$$

$\forall n \geq 0$, on pose

$$L_n = L \cap \Sigma^n$$

$$u_n = |L_n| \qquad (\text{ le cardinal de } L_n)$$

On rappelle que Σ^n est constitué des mots de longueur n sur l'alphabet Σ.

1) Calculer $L_0, L_1, L_2, u_0, u_1, u_2$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot $w = xw'$, avec $x \in \Sigma$, appartienne à L_n.

3) Exprimer L_n en fonction de L_{n-1} et L_{n-2}; en déduire que la relation de récurrence définissant u_n est donnée par $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$.

4) Calculer u_n.

5) On calculera de même $v_n = |L'_n|$ avec $L'_n = L' \cap \Sigma^n$ et

$$L' = \{w \in \Sigma^* \,/\, w \text{ n'a pas } ab \text{ ou } ac \text{ comme facteur}\}\,.$$ ♢

T.S.V.P.

EXERCICE 6 Résoudre les relations de récurrence

1) $$\forall n \geq 1, \qquad \begin{cases} u_n & = 4u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n & = -3u_{n-1} - v_{n-1} \end{cases}$$

avec $u_0 = a, \; v_0 = b$.

2) $$\forall n \geq 1, \qquad \begin{cases} u_n & = u_{n-1}^4 v_{n-1}^2 \\ v_n & = \dfrac{1}{u_{n-1}^3 v_{n-1}} \end{cases}$$

avec $u_0 = a > 0, \; v_0 = b > 0$. ◊

EXERCICE 7 Résoudre la récurrence $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n$, $n \geq 2$, avec $u_0 = u_1 = 1$. ◊

EXERCICE 8 Soit la récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4n$, pour tout $n \geq 0$ avec les conditions initiales $u_0 = u_1 = 0$. Calculer le terme général u_n. ◊

EXERCICE 9 Résoudre la récurrence $u_n = 4u_{n/2} + n^2$, pour $n = 2^k$ avec $k > 1$ et u_1 donné. ◊

EXERCICE 10 Résoudre les relations de récurrence suivantes

1) $\forall n \geq 2, \quad u_n = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{u_{n-2}}}$, avec $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

2) $\forall n \geq 2, \quad u_n = \sqrt{u_{n-1} u_{n-2}}$, avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

3) $\forall n \geq 2, \quad u_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{b_{n-1} + b_{n-2}}$, avec $u_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$ et $u_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$. ◊

EXERCICE 11 En résolvant l'équation différentielle linéaire sur $F(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$ résoudre :

$$\begin{cases} 2(n+1)u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n!} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

◊