LICENCE O.M.I. - T.D. Logique 2

EXERCICE 1 Une variable x est dite libre dans une formule F si elle a au moins une occurrence libre; x est dite liée dans F si toutes ses occurrences sont liées. Trouver les variables liées, les variables libres et les occurrences libres des variables dans les formules suivantes:

- $\exists x\,\big(p(x) \wedge q(x)\big)$
- $\big(\exists x\, p(x)\big) \wedge q(x)$
- $\exists x\,\big(p(x) \wedge q(x,y)\big)$
- $\big(\exists x\, p(x)\big) \wedge q(x,y)$
- $\big(\exists x\, p(x)\big) \wedge \big(\forall y\, q(x,y)\big) \wedge \big(\forall x\, r(x,y)\big)$ $\diamondsuit$

EXERCICE 2 1. Trouver une formule prénexe équivalente à

$$\exists x P(x) \wedge \forall x\big(\exists y Q(y) \supset R(x)\big)$$

2. Trouver une formule prénexe équivalente à

$$(\exists x P(x)) \supset \big(\exists x Q(x)\big)$$

$\diamondsuit$

Dans les exercices suivants (Exercice 3 à Exercice 5), vous pouvez utiliser toutes les règles de la logique propositionnelle, ainsi que les trois règles suivantes:

- Si $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ alors: $\mathcal{F} \vdash F[x := t]$ (règle d'instantiation).
- Si $\mathcal{F} \vdash F$ et si x n'est pas libre dans $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire x n'est libre dans aucune des formules de $\mathcal{F}$), alors: $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ (règle de généralisation universelle).
- $\mathcal{F} \vdash \exists x F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F$ (définition de $\exists$).

EXERCICE 3 La déduction suivante est-elle correcte ? Si oui, justifiez chaque ligne, sinon dire quelle ligne est fausse et pourquoi.

Vous pouvez éventuellement ajouter des hypothèses si nécessaire.

Vous pouvez utiliser, outre toutes les règles de la logique propositionnelle, et les trois règles additionnelles pour le calcul des prédicats, les règles suivantes :

- Si $\mathcal{F} \vdash F$ et $\mathcal{F} \vdash G$, alors : $\mathcal{F} \vdash (F \wedge G)$.
- Si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge G)$, alors : $\mathcal{F} \vdash F$.
- Si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge G)$, alors : $\mathcal{F} \vdash G$.

Soit ϕ la formule $G \wedge (\forall x F)$ et soit ψ la formule $\forall x(G \wedge F)$.

1	$\{\phi\} \vdash \phi$	(hypothèse)
2	$\{\phi\} \vdash G$	(...?)
3	$\{\phi\} \vdash \forall x F$	(...?)
4	$\{\phi\} \vdash F$	(...?)
5	$\{\phi\} \vdash (G \wedge F)$	(...?)
6	$\{\phi\} \vdash \psi$	(...?)

$\diamondsuit$

EXERCICE 4 Quelles sont les règles ou résultats utilisés dans la preuve ci-dessous ?

T.S.V.P.

1 - Si $\mathcal{F}, F \vdash G$ et si x n'est pas libre dans $\mathcal{F}$ et G alors $\mathcal{F}, \exists x F \vdash G$. En effet nous avons:

1)	$\mathcal{F}, F \vdash G$	
2)	$\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$	(...?)
3)	$\mathcal{F}, \neg G \vdash \forall x \neg F$	(...?)
4)	$\mathcal{F}, \neg \forall x \neg F \vdash G$	(...?)
5)	$\mathcal{F}, \exists x F \vdash G$	(...?)

2 - $\exists x \forall y F \vdash \forall y \exists x F$. En effet nous avons:

1)	$\forall y F\,,\ \forall x \neg F \vdash \forall y F$	(...?)
2)	$\forall y F\,,\ \forall x \neg F \vdash F[y := y]$	(...?)
3)	$\forall y F\,,\ \forall x \neg F \vdash \forall x \neg F$	(...?)
4)	$\forall y F\,,\ \forall x \neg F \vdash \neg F[x := x]$	(...?)
5)	$\forall y F \vdash \neg(\forall x \neg F)$	(...?)
6)	$\forall y F \vdash \exists x F$	(...?)
7)	$\forall y F \vdash \forall y \exists x F$	(...?)
8)	$\exists x \forall y F \vdash \forall y \exists x F$	

$\diamondsuit$

EXERCICE 5 La déduction suivante est-elle correcte ? Si oui, justifiez chaque ligne, sinon dire quelle ligne est fausse et pourquoi.

Vous pouvez éventuellement ajouter des hypothèses si nécessaire.

Soit ϕ la formule $(\forall x F) \supset G$ et soit ψ la formule $\forall x \neg(F \supset G)$

1	$\{\phi\ ,\ \psi\ ,\ F\} \vdash\ \phi$	(hypothèse)
2	$\{\phi\ ,\ \psi\ ,\ F\} \vdash\ F$	(...?)
3	$\{\phi\ ,\ \psi\ ,\ F\} \vdash\ \forall x F$	(...?)
4	$\{\phi\ ,\ \psi\ ,\ F\} \vdash\ G$	(...?)
5	$\{\phi\ ,\ \psi\} \vdash\ (F \supset G)$	(...?)
6	$\{\phi\ ,\ \psi\} \vdash\ \psi$	(...?)
7	$\{\phi\ ,\ \psi\} \vdash\ \neg(F \supset G)$	(...?)
8	$\{\phi\ \} \vdash\ \neg \forall x \neg(F \supset G)$	(...?)
9	$\{\phi\ \} \vdash\ \exists x (F \supset G)$	(...?)

$\diamondsuit$

EXERCICE 6 Soit L un alphabet contenant les constantes a, b, c, et les prédicats binaires arc et $chem$. On définit une interprétation I par $I = \langle E, \gamma, h \rangle$, avec

- $E = \mathbb{N}$,
- $h(a) = a_I = 0$, $h(b) = b_I = 1$, $h(c) = c_I = 2$,
- $\gamma(arc) = arc_I$ est défini par $arc_I(n,p) = vrai$ si et seulement si $p = n+1$ et $\gamma(chem) = chem_I$ est défini par $chem_I(n,p) = vrai$ si et seulement si $p = n+2$.

Soient les ensembles de formules

$$F_1 = \{arc(a,b)\ ,\ arc(b,c)\}$$

$$F_2 = \Big\{ \forall x, y \Big(arc(x,y) \supset chem(x,y) \Big) \Big\}$$

$$F_3 = \Big\{ \forall x, y, z \Big(\ (arc(x,z) \wedge chem(z,y)) \ \supset chem(x,y) \Big) \Big\}$$

1. I est-elle modèle de F_j pour $j = 1,2,3$? Justifiez votre réponse.

2. Pouvez-vous trouver des modèles J de $\{F_1, F_2, F_3\}$ tels que $J = \langle E, \gamma, h \rangle$, avec $E = \mathbb{N}$ et $arc_J = arc_I$. ♢

EXERCICE 7 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et les prédicats binaires Arc et $Chem$. On définit une interprétation I par $I = \langle E, \gamma, h \rangle$, avec

- $E = \mathbb{N}$,
- $h(a) = a_I = 0$,
- $h(s) = s_I$ est défini par $h(s)(n) = n+1$ et
- $\gamma(Arc)$ défini par $\gamma(Arc)(n,p) = vrai$ si et seulement si $p = n+1$,
- $\gamma(Chem)$ défini par $\gamma(Chem)(n,p) = vrai$ si et seulement si $p \geq n+1$.

Soient les formules $F_1 = \forall x Arc(x, s(x))$, $F_2 = \forall x \forall y \Big(Arc(x,y) \ \supset \ Chem(x,y) \Big)$ et $F_3 = \forall x \forall y \forall z \Big(\big(Arc(x,y) \wedge Chem(y,z) \big) \supset Chem(x,z) \Big)$.

1. I est-elle modèle de F_j pour $j = 1,2,3$? I est-elle modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$?

2. On définit une interprétation I' par $I = \langle E, \gamma', h' \rangle$, avec $h' = h$ et $\gamma'(Arc) = \gamma'(Chem) = \gamma(Arc)$. I' est-elle modèle de F_j pour $j = 1,2,3$? I' est-elle modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$?

3. Pouvez-vous trouver d'autres modèles de $\{F_1, F_2, F_3\}$. ♢

EXERCICE 8 On considère la structure S, ayant pour domaine l'ensemble des suites des lettres de l'alphabet A (où ε dénote le mot vide) et munie des opérations:

- $head(x) =$ la première lettre de x si $x \neq \varepsilon$, et $head(x) = \varepsilon$ si $x = \varepsilon$.
- $tail(x) = x$ auquel on enlève la première lettre de x si x a au moins deux lettres, et $tail(x) = \varepsilon$ si x a 0 ou une lettre.
- $join(x,y) =$ la concaténation de x et y.

Par exemple, pour $x = abc$, $head(x) = a$, $tail(x) = bc$, $tail(head(x)) = \varepsilon$, et $join(x, de) = abcde$.

1) Pour quel(s) F la formule $\forall x (x \neq \varepsilon \supset F)$ est-elle valide?

A) $F = \Big(join(head(x), tail(x)) = x \Big)$

B) $F = \Big(head(tail(x)) = tail(head(x)) \Big)$

C) $F = \Big(join(head(x), x) = join(x, tail(x)) \Big)$

D) $F = \Big(tail(head(x)) = x \Big)$

E) $F = \Big(head(tail(x)) = x \Big)$

2) Pour $x = \varepsilon$ on pose $reverse(x) = x$, comment faut-il compléter cette définition pour les suites non vides pour que $reverse$ définisse l'image miroir?

A) $reverse(x) = join(reverse(tail(x)), head(x))$

B) $reverse(x) = join(tail(reverse(x)), head(x))$

C) $reverse(x) = join(tail(x), head(x))$

D) $reverse(x) = reverse(join(head(x), tail(x)))$

E) $reverse(x) = join(head(x), reverse(tail(x)))$

♢

Exercice 9   Soit L un alphabet contenant le prédicat binaire $=$.

1. Trouver une formule F_n telle que tout modèle S de F_n ait un domaine E ayant au moins $n+1$ éléments.
2. Trouver un ensemble de formules dont tout modèle S ait un domaine E qui soit infini. $\diamond$

Exercice 10   Soit L un alphabet contenant les constantes a, b, c, la fonction unaire s et le prédicat binaire p. Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$:

$$\begin{aligned} F_1 &: \ \forall x \forall y \forall z \ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \supset p(x,z)) \\ F_2 &: \ \forall x \ (p(x,b) \wedge p(a,x)) \\ F_3 &: \ \forall x \ p(x, s(x)) \end{aligned}$$

1. Trouver deux modèles de $\mathcal{F}$.
2. Montrer que $\mathcal{F} \vdash \forall y \ (p(x,y) \supset p(x,s(y)))$.
3. Montrer que $\mathcal{F} \vdash \exists x \ p(x,a)$.
4. Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F}' = \{F_1, F_2', F_3\}$ où F_2' est la formule $\forall x \ p(x,b)$. Montrer que $\mathcal{F}' \not\vdash \exists x \ p(x,a)$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathcal{F}' \not\models \exists x \ p(x,a)$ en exhibant un modèle de $\mathcal{F}'$ qui ne soit pas un modèle de $\exists x \ p(x,a)$, c'est-à-dire un contre-modèle, ou un contre-exemple. $\diamond$