LICENCE O.M.I. - T.D. Logique 1

EXERCICE 1   Mettre en forme normale disjonctive
$\neg(p \wedge \neg(q \vee s))$
$\neg(p \wedge (q \vee s))$
$\neg(p \vee (q \wedge \neg s)) \wedge s$ ♢

EXERCICE 2   Les formules peuvent être écrites en notation infixe (cours) ou préfixe, et on omet parfois les parenthèses. Parmi les mots suivants, écrits en notation préfixe, reconnaitre ceux qui sont des formules, les écrire en notation infixe et dessiner l'arbre syntaxique les représentant.

1. $\supset \neg p \vee qr$;
2. $\supset \neg pq \vee r$;
3. $\supset \neg \supset \vee \wedge pqrs \vee st$;
4. $\supset \vee \neg pqr$;
5. $\supset \neg ps \vee qr$. ♢

EXERCICE 3   Définissons $F \wedge F' \stackrel{\text{def}}{=} \neg(F \supset \neg F')$ et $F \vee F' \stackrel{\text{def}}{=} \neg F \supset F'$.

1) Ecrire les tables donnant les valeurs de vérité de $\supset, \wedge, \vee$. En déduire que

$$I(F \wedge F') = I(F).I(F') \quad \text{et} \quad I(F \vee F') = I(F) + I(F')\,.$$

2) Montrer que

$$\begin{aligned} I\big(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset F) \cdots))\big) &= \overline{I(F_n)} + \overline{I(F_{n-1})} + \cdots + \overline{I(F_1)} + I(F) \\ &= I\big(\neg F_n \vee (\neg F_{n-1} \vee (\cdots \vee (\neg F_1 \vee F) \cdots))\big) \end{aligned}$$

En déduire que

$$I\big(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset F) \cdots))\big) = I\big((F_n \wedge (F_{n-1} \wedge (\cdots \wedge (F_2 \wedge F_1)) \cdots)) \supset F\big).$$ ♢

EXERCICE 4   Vérifier que F est insatisfaisable si et seulement si $\neg F$ est valide. ♢

EXERCICE 5   1) Montrer qu'une formule G est vraie dans I (resp. valide) si le séquent $(\emptyset, G)$ est vrai dans I (resp. valide).

2) Les séquents suivants sont-ils valides?

– $(\emptyset, (p \supset q))$,
– $(\{p, (p \supset q)\}, q)$. ♢

EXERCICE 6   1. On veut montrer que $\mathcal{F}, F \vdash G$ si et seulement si $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$. Quelles sont les règles utilisées dans la preuve ci-dessous de la *règle de la contraposée1* ?

1.	$\mathcal{F}, F \vdash G$	
2.	$\mathcal{F}, F, \neg G \vdash G$	$(\ldots?\ldots)$
3.	$\mathcal{F}, F, \neg G \vdash \neg G$	$(\ldots?\ldots)$
4.	$\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$	$(\ldots?\ldots)$

2. Montrer par une preuve similaire que si $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$ alors $\mathcal{F}, F \vdash G$. (*Règle de la contraposée2*). ♢

EXERCICE 7   Les *formules du premier ordre* ont été définies inductivement (en notation infixe) par:

T.S.V.P.

– Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

– Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, et $(F \vee F')$ sont des formules.

– Si F est une formule et x est une variable, alors $\forall x F$ et $\exists x F$ sont des formules.

1. Dessiner l'arbre représentant la formule $\neg\Big((\forall x P(x)) \wedge Q(x)\Big) \supset \Big(R(x) \vee \neg P(x)\Big)$. Ecrire cette formule en notation préfixe (c'est-à-dire en mettant les opérateurs $\wedge, \supset$, etc. d'abord).
2. Donner une définition inductive de la fonction transformant la notation infixe en notation préfixe. Pouvez-vous modifier cette définition inductive pour obtenir une fonction transformant la notation infixe en un arbre représentant la formule ? $\diamondsuit$

Exercice 8 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et les prédicats unaires P et Q. On définit une interprétation I par $I = \langle E, \gamma, h\rangle$, avec

- $E = \mathbb{N}$,
- $h(a) = a_I = 0$,
- $h(s) = s_I$ est défini par $h(s)(n) = n + 1$ et
- $\gamma(P)$ défini par $\gamma(P)(n) = vrai$ si et seulement si n est pair,
- $\gamma(Q)$ défini par $\gamma(Q)(n) = vrai$ pour tout n.

Soient les ensembles de formules $F_1 = \{Q(a)\}$, $F_2 = \Big\{\forall x\Big(Q(x) \supset Q(s(x))\Big)\Big\}$ et $F_3 = \{Q(x) \supset P(a)\}$.

1. I est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2, 3$?
2. Pouvez-vous trouver des modèles de $\{F_1, F_2, F_3\}$. $\diamondsuit$

Exercice 9 Soit L un alphabet contenant la constante a et le prédicat binaire R.

1. Quels sont les modèles de F: $\forall x R(x, x)$?
2. Quels sont les modèles de F: $\forall x \forall y\big(R(x, y) \supset R(y, x)\big)$? $\diamondsuit$

Exercice 10 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et le prédicat unaire P. On définit deux interprétations I_1 et I_2 par $I_1 = \langle E, \gamma_1, h\rangle$ et $I_2 = \langle E, \gamma_2, h\rangle$, avec

- E l'ensemble des termes construits sur l'alphabet $A = \{a, s\}$,
- $h(a) = a_{I_1} = a_{I_2} = a$,
- $h(s) = s_{I_1} = s_{I_2}$ est défini par $h(s)(s^n(a)) = s^{n+1}(a)$ et
- $\gamma_1(P)$ défini par $\gamma_1(P)(s^n(a)) = vrai$ si et seulement si $n = 1$,
- $\gamma_2(P)$ défini par $\gamma_2(P)(s^n(a)) = vrai$ pour tout n.

Soient les ensembles de formules $F_1 = \{P(a)\}$, $F_2 = \Big\{\forall x\Big(P(x) \supset P(s(x))\Big)\Big\}$ et $F_3 = F_1 \cup F_2$.

1. I_1 est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2, 3$?
2. Même question pour I_2. $\diamondsuit$

Exercice 11 Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux ensembles de formules. On dit que $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ si et seulement si pour toute interprétation I, on a

$$I(F) = vrai \text{ pour toute } F \in \mathcal{F}$$

implique que

$$I(G) = vrai \text{ pour toute } G \in \mathcal{G} \ .$$

Montrer que $\Big(\mathcal{F} \models \mathcal{F}' \text{ et } \mathcal{F}' \models \mathcal{F}''\Big)$ implique que $\mathcal{F} \models \mathcal{F}''$. $\diamondsuit$