LICENCE O.M.I. - T.D. Algèbres de Boole

EXERCICE 1 Dualité. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. La relation $\geq$ est une relation d'ordre appelée ordre inverse. Par exemple, le dual de $(\mathbb{N}, \leq)$ est l'ensemble des entiers ordonné par $\tilde{\leq}$ avec $n \tilde{\leq} m$ ssi $m \leq n$; 0 est le plus grand élément de ce dual.

Que deviennnent les concepts de borne supérieure, inférieure, maximum, minimum, etc. quand on prend l'ordre inverse ?

A une propriété de l'ordre $\leq$ correspond la propriété *duale* de $\geq$. Expliquer comment on obtient le dual d'une définition ou d'un théorème. Comment exprimer le dual de la propriété “ être un ensemble bien ordonné” ? ◇

EXERCICE 2 Soit $(E, \leq, \sqcup, \sqcap)$ un treillis, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) $\sqcup$ est distributive sur $\sqcap$ $\forall x, y, z, \quad x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$,
(ii) $\sqcap$ est distributive sur $\sqcup$ $\forall x, y, z, \quad x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$. ◇

EXERCICE 3 On appelle *fonction caractéristique* d'une partie A de E la fonction $\chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par:

$$\chi_A(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A, \\ 0 & \text{si } e \notin A. \end{cases}$$

1. Exprimer en termes de fonction caractéristique les opérations d'union, intersection, différence, différence symétrique, complémentation.

2. Si E est fini de taille n montrer que la fonction caractéristique d'une partie A de E peut être écrite comme un n-uplet de nombres 0 ou 1 ; en déduire un isomorphisme entre les algèbres de Boole $\mathcal{P}(E)$ et $\{0, 1\}^n$. ◇

EXERCICE 4 1. Montrer que la relation $x \leq y$ ssi $x \sqcup y = y$ est une relation d'ordre sur une algèbre de Boole et que pour cet ordre, $\sup(x, y) = x \sqcup y$.

2. Montrer qu'un homomorphisme est une application monotone pour l'ordre sous-jacent à l'algèbre de Boole défini dans la question 1.

3. Montrer que toute application monotone n'est pas forcément un homomorphisme. ◇

EXERCICE 5 Trouver un polynôme booléen pour la fonction f définie par:

$f(x,y)$	x / y	0	1
	0	1	0
	1	0	0

Quelle est la table de vérité de la fonction duale ? Trouver un polynôme booléen pour la fonction duale. ◇

EXERCICE 6 Ecrire la table de vérité et la fonction duale de $xy + \overline{x}\,\overline{y}$. ◇

EXERCICE 7 Trouver un polynôme booléen pour la fonction f définie par:

T.S.V.P.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Quelle est la table de vérité de la fonction duale ? Trouver un polynôme booléen pour la fonction duale. $\diamondsuit$

Exercice 8 Une fonction Booléenne f à n arguments est *croissante* ssi pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, tels que $x_i \leq y_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, on a $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$. Montrer par induction sur n que f est croissante ssi f est constante ou f peut être obtenue sous la forme d'un polynôme ne contenant aucune complémentation. $\diamondsuit$

Exercice 9 Donner les 16 fonctions booléennes à deux arguments sous forme polynomiale. Pour chacune d'elles, donner sa fonction duale. $\diamondsuit$

Exercice 10 Une fonction est *auto-duale* ssi $f(x) = \overline{f(\overline{x})}$. Les fonctions suivantes sont-elles auto-duale ?

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = x + y$
3. $f(x, y) = xy + \overline{x}\,\overline{y}$
4. $f(x, y) = xy + \overline{x}y$ $\diamondsuit$

Exercice 11 1. Donner un exemple de fonction auto-duale de 3 variables.

2. Quel est le nombre de fonctions auto-duales à $n + 1$ variables ? $\diamondsuit$

Exercice 12 On définit $x\ NAND\ y = \overline{xy}$. Montrer que toutes les opérations booléennes sont exprimables en fonction de $NAND$. $\diamondsuit$