LICENCE O.M.I. - T.D. Langages et automates

EXERCICE 1 Soit A un alphabet contenant au moins les lettres a et b.
1) Donner un homomorphisme de A^* dans $(A \cdot A)^*$.
2) Donner un homomorphisme de A^* dans $(A \setminus \{b\})^*$.
3) Y a-t-il un isomorphisme de monoïde (c'est-à-dire un homomorphisme bijectif dont l'inverse est un homomorphisme) entre $(A \setminus \{a\})^*$ et $(A \setminus \{b\})^*$? $\diamondsuit$

EXERCICE 2 **Lemme de Lévi:** Soient $u, v, x, y \in A^*$. Montrer que $uv = xy$ si et seulement si l'un des trois cas suivants est vérifié:
(i) $|u| = |x|$, $u = x$, et $v = y$.
(ii) $|u| < |x|$ et il existe $t \in A^*$ tel que $ut = x$ et $v = ty$.
(iii) $|u| > |x|$ et il existe $t \in A^*$ tel que $u = xt$ et $tv = y$. $\diamondsuit$

EXERCICE 3 Soit $A = \{a, b\}$; soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre impair de "a" et L_2 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre pair de "b".
1. Donner pour chaque L_i un automate déterministe complet A_i reconnaissant L_i.
2. Construire à partir des A_i un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. Construire à partir des A_i un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cup L_2$. $\diamondsuit$

EXERCICE 4 1) Montrer que $(\mathcal{P}(A^*), \cdot, \{\varepsilon\})$ est un monoïde.
2) Montrer que si $(L_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de langages, alors

$$(\bigcup_{i \in I} L_i) \cdot L = \bigcup_{i \in I} L_i \cdot L,$$

3) Montrer que $L^* = (L + \{\varepsilon\})^*$ et que $L^* = \{\varepsilon\} + L \cdot L^*$.
4) Montrer que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 5 Soit $X = \{b\}$ et $Y = (A \setminus \{b\}) \cdot \{b\}^*$.
1) Décrire informellement les éléments de X^*, Y et Y^*.
2) Montrer que tout mot de A^* commençant par une lettre distincte de b appartient à Y^*.
3) Montrer que tout mot u de A^* s'écrit de façon unique sous la forme $u = vw$, où $v \in X^*$ et $w \in Y^*$. $\diamondsuit$

EXERCICE 6 Soit L un langage et $\mathrm{Pref}\,(L) = \{u \in A^* \,/\, \exists v \in A^* : uv \in L\}$ l'ensemble des préfixes des mots de ce langage L. Montrer que si un langage L est reconnaissable l'ensemble $\mathrm{Pref}\,(L)$ est aussi reconnaissable. $\diamondsuit$

EXERCICE 7 Montrer que tout langage *fini* est reconnu par un automate fini déterministe. (On expliquera comment on peut construire un tel automate à partir des préfixes des mots de ce langage). $\diamondsuit$

EXERCICE 8 Déterminiser et compléter l'automate suivant sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, où l'état initial et les états terminaux sont notés i et f, f'.

$$f \xleftarrow{a,c} x \xleftarrow{b} i \xleftrightarrow{b} y \xrightarrow{b,c} z \xleftrightarrow{a,c} f'$$

$\diamondsuit$

EXERCICE 9 Soit $A = \{a, b, c\}$. Donner des automates déterministes complets reconnaissant les langages suivants:
1) L'ensemble des mots de longueur paire.
2) L'ensemble des mots où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3.
3) L'ensemble des mots se terminant par "b".

T.S.V.P.

4) L'ensemble des mots ne se terminant pas par "b".

5) L'ensemble des mots non vides ne se terminant pas par "b".

6) L'ensemble des mots contenant au moins un "b".

7) L'ensemble des mots contenant au plus un "b".

8) L'ensemble des mots contenant exactement un "b".

9) L'ensemble des mots ne contenant aucun "b".

10) L'ensemble des mots contenant au moins un "a" et dont la première occurrence de "a" n'est pas suivie par un "c".

11) L'ensemble des mots comportant au moins trois lettres et dont la troisième lettre à partir de la fin est un "a" ou un "c". ♢

EXERCICE 10 Donner les automates déterministes complets minimaux reconnaissant les langages sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ donnés par les expressions rationnelles suivantes

1) $(a + b)^* b (a + b)^*$.

2) $ba^* + ab + (a + bb)ab^*$.

3) $\left((a + b)^2\right)^+ + \left((a + b)^3\right)^+$.

♢

EXERCICE 11 Soit L l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3. Il y a un automate $\mathcal{A}$ à trois états tel que $L = L(\mathcal{A})$. Donner le système d'équations associé aux transitions, et résoudre ce système pour $L_{I,F}$, pour donner une expression rationnelle dénotant L. ♢

EXERCICE 12 Soit $A = \{a, b\}$ et L le langage comprenant tous les mots ayant trois occurrences successives de "a". Donner l'automate déterministe complet minimal reconnaissant L et résoudre le système d'équations correspondant; en déduire une expression rationnelle pour L. ♢

EXERCICE 13 Soit L le langage sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ comprenant tous les mots qui n'ont pas trois occurrences successives de "a". Donner l'automate déterministe complet minimal reconnaissant L et résoudre le système d'équations correspondant; en déduire une expression rationnelle pour L. ♢

EXERCICE 14 Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et L le langage comprenant tous les mots où tout "a" est suivi d'un "b" et tout "c" est suivi d'un "b". Donner l'automate déterministe complet minimal reconnaissant L et résoudre le système d'équations correspondant; en déduire une expression rationnelle pour L. ♢