les exercices sont indépendants
DOCUMENTS et calculettes interdits

Téléphones éteints et rangés dans vos sacs
Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée
Vous pouvez rédiger les exercices 1 et 4 2. sur l'énoncé

On rapelle les règles du calcul des séquents

- utilisation d'une hypothèse : $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \vdash F$
- augmentation des hypothèses : si $G \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \cup \{G\} \vdash F$
- règle de détachement (ou modus ponens) : si $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$ et si $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$
- règle de synthèse (ou retrait d'une hypothèse) : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$
- règle de la double négation : $\mathcal{F} \vdash F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\neg F$
- règle du raisonnement par l'absurde : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ et $\mathcal{F}, F \vdash \neg F'$, alors $\mathcal{F} \vdash \neg F$.
- Si $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ *et* si t est substituable à x dans F, alors : $\mathcal{F} \vdash F[x := t]$ (règle d'instantiation).
- Si $\mathcal{F} \vdash F$ et si x n'est pas libre dans $\mathcal{F}$, alors : $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ (règle de généralisation universelle).
- $\mathcal{F} \vdash \exists x F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F$ (définition de $\exists$).

On pourra utiliser aussi les règles suivantes, énoncées ou démontrées en cours :

- si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge F')$ alors $\mathcal{F} \vdash F$, (élimination de et1)
- si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge F')$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$, (élimination de et2)
- si $\mathcal{F}, G \vdash F$ et $\mathcal{F}, \neg G \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \vee F')$ (introduction de ou) .
- $\mathcal{F} \vdash G \wedge \exists x F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \exists x(G \wedge F)$, si x n'a aucune occurrence libre dans G (prénexe1)
- $\mathcal{F} \vdash \forall x(F \wedge G)$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash (\forall x F) \wedge G)$, si x n'a aucune occurrence libre dans G (prénexe2).

EXERCICE 1 Soit $\phi = \forall x \exists y \big(p(x) \wedge q(y)\big)$ et $\psi = \exists y \forall x \big(p(x) \wedge q(y)\big)$. On déduit ψ à partir de ϕ. Laquelle des déductions suivantes est correcte ? Vous justifierez votre réponse en donnant le nom des règles appliquées à chaque étape de la déduction correcte, avec justification des hypothèses d'application de la règle si nécessaire, et en donnant un contrexemple pour l'étape fausse de la déduction fausse : votre contrexemple sera un modèle de la ligne précédant la ligne fausse, et ne sera pas un modèle de la ligne fausse.

1) $\phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (instantiation)

$\phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$ (   )

$\phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big)$ (   )

$\phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$ (   )

$\phi \vdash \exists y \Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big)$ (   )

$\phi \vdash \exists y \forall x \Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (   )

T.S.V.P.

2) $\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (instantiation)

$\phi \vdash \neg\forall y\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ ( )

$\phi \vdash \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ ( )

$\phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ ( )

$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ ( )

$\phi \vdash \neg\forall y\neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ ( )

$\phi \vdash \exists y\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ ( )

$\diamondsuit$

Exercice 2 1. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant les règles du calcul des séquents.
2. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant la résolution. $\diamondsuit$

Exercice 3 $(\forall x \exists y R(x, y, z)) \supset (\forall x \exists z Q(x, y, z))$.
1. Donner une forme prénexe de F. Donner une autre forme prénexe de la même formule ?
2. Skolemiser les formules obtenues à la question 1.
3. $f(x, y)$ est-il substituable à z ? à y ? Donner le résultat de la substitution si c'est substituable et la raison si ce n'est pas substituable.
4. $f(z, a)$ est-il substituable à z ? à y ? Donner le résultat de la substitution si c'est substituable et la raison si ce n'est pas substituable. $\diamondsuit$

Exercice 4 1. Ecrire (dans le langage de Tarski et en utilisant les prédicats $Cube$ et $LeftOf$ de Tarski) des formules logiques F_1 , F_2 et F_3 traduisant que
(i) *Deux objets non comparables dans la relation "à gauche de" sont égaux*
(ii) *Deux cubes quelconques ne sont jamais comparables dans la relation "à gauche de"*
(iii) *Deux cubes quelconques sont égaux*
2. Justifier les règles employées dans la déduction suivante par calcul des séquents, où l'on suppose que les séquents $\mathcal{F} \vdash F \supset G$ et $\mathcal{F} \vdash G \supset H$ sont prouvés (donner le nom de la règle utilisée à chaque étape).

1. $\mathcal{F} \vdash \big(F \supset G\big)$ (séquent prouvé)
2. $\mathcal{F} \vdash \big(G \supset H\big)$ (séquent prouvé)
3. $\mathcal{F}, F \vdash \big(F \supset G\big)$ ( )
4. $\mathcal{F}, F \vdash \big(G \supset H\big)$ ( )
5. $\mathcal{F}, F \vdash F$ ( )
6. $\mathcal{F}, F \vdash G$ ( )
7. $\mathcal{F}, F \vdash H$ ( )
8. $\mathcal{F} \vdash \big(F \supset H\big)$ ( )

3. Montrer que $\{F_1, F_2\} \vdash F_3$
1) Par résolution (Indication : la forme clausale de $\neg F_3$ est $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg\ (a = b)$)
2) Par le calcul des séquents. $\diamondsuit$

1) $\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (instantiation)

$\phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$ (prénexe1, y non libre dans $p(x)$)

$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big)$ (généralisation, x non libre dans ϕ)

$\phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$ (prénexe2, x non libre dans $\exists y q(y)$)

$\phi \vdash \exists y\Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big)$ (prénexe1, y non libre dans $\forall x p(x)$)

$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (prénexe2, x non libre dans $q(y)$)

2) $\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (instantiation)

$\phi \vdash \neg\forall y \neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (définition de $\exists$)

$\phi \vdash \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (FAUX)

$\phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (double négation)

$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (généralisation, x non libre dans ϕ)

$\phi \vdash \neg\forall y \neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (non justifié)

$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ (définition de $\exists$)

un contrex. parmi d autres les entiers avec $p(x)$ ssi $x \geq 0$ et $q(x)$ ssi $x = 0$.

2. Forme clausale de $p \wedge q, \neg(p \vee q)$ est $p, q, \neg p, \neg q$.
1.

1)	$p \wedge q \vdash p \wedge q$	(hypothèse)
2)	$p \wedge q \vdash p$	(élim et1)
3)	$p \wedge q \vdash q$	(élim et2)
4)	$p \wedge q, p \vdash p$	(augmentation sur 2))
5)	$p \wedge q, \neg p \vdash q$	(augmentation sur 3))
6)	$p \wedge q \vdash p \vee q$	(introd. de ou)

2. résolution immédiate à partir de la forme clausale $\dfrac{p \qquad \neg p}{\square}$

$Q(x', y, z'))$ et

forme prénexe2 $(\forall x \exists z' \exists x' \forall y' \big(R(x', y', z) \supset Q(x, y, z')\big)$ (entre autres, ...)..

2. $(\forall y' \forall x' \big(R(a, y', z) \supset Q(x', y, f(y', x'))\big)$ et $(\forall x \forall y' \big(R(g(x), y', z) \supset Q(x, y, h(x))\big)$

3.$f(x, y)$ est-il substituable à z ? non (capture des variablex x, y), à y ? non (capture de la variable x)

4.$f(z, a)$ est-il substituable à z ? oui, résultat : $(\forall x \exists y R(x, y, f(z, a))) \supset (\forall x \exists z Q(x, y, z))$. à y ? non (capture de la variable z)

3. 1 et 2 non (capture de variable), 3 oui.

4.

F_1: $\forall y \forall x \Big(\neg(leftof(x, y) \vee leftof(y, x)) \supset x = y\Big) = \forall y \forall x \Big(G \supset H\Big)$

F_2: $\forall y \forall x \Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset \neg(leftof(x, y) \vee leftof(y, x))\Big) = \forall y \forall x \Big(F \supset G\Big)$

F_3: $\forall y \forall x \Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x\Big)$

2. Justification

1	$\mathcal{F} \vdash \Big(F \supset G\Big)$	(séquent prouvé)
2	$\mathcal{F} \vdash \Big(G \supset H\Big)$	(séquent prouvé)
3	$\mathcal{F}, F \vdash \Big(F \supset G\Big)$	(augmentation)
4	$\mathcal{F}, F \vdash \Big(G \supset H\Big)$	(augmentation)
5	$\mathcal{F}, F \vdash F$	(hypothèse)
6	$\mathcal{F}, F \vdash G$	(MP sur 5 et 3)
7	$\mathcal{F}, F \vdash H$	(MP sur 6 et 4)
8	$\mathcal{F} \vdash \Big(F \supset H\Big)$	(Synthèse)

3. La forme clausale de $F_1, F_2, \neg F_3$ est (sans les $\forall$)

$leftof(x, y) \vee leftof(y, x) \vee x = y$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x, y)$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y, x)$, $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg(a = b)$

3.1) De $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x, y)$ et $cube(a)$ on déduit $\neg cube(y) \vee \neg leftof(a, y)$

De $\neg cube(y) \vee \neg leftof(a, y)$ et $cube(b)$ on déduit $\neg leftof(a, b)$

De même on déduit de $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y, x)$ et $cube(a)$, $cube(b)$, que $\neg leftof(b, a)$

puis de $\neg leftof(b, a)$, $\neg leftof(a, b)$, $leftof(x, y) \vee leftof(y, x) \vee x = y$, $\neg(a = b)$ on déduit la clause vide.

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(F \supset G \right) \quad \text{(hypothèse)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(F \supset G \right) \quad \text{(instantiation , } y \text{ substituable à } y\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \left(F \supset G \right) \quad \text{(instantiation , } x \text{ substituable à } x\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(G \supset H \right) \quad \text{(hypothèse)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(G \supset H \right) \quad \text{(instantiation , } y \text{ substituable à } y\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \left(G \supset H \right) \quad \text{(instantiation , } x \text{ substituable à } x\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \left(F \supset H \right) \quad \text{(question 2 , Exercice 4)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(F \supset H \right) \quad \text{(généralisation universelle car } x \text{ non libre dans } \{F_1, F_2\}\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(F \supset H \right) \quad \text{(généralisation universelle car } y \text{ non libre dans } \{F_1, F_2\}\text{)}$$

or $\forall y \forall x \left(F \supset H \right)$ est F_3.