Partiel – 31 Octobre 2007

1. Construire une preuve du séquent $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$ et donner le λ-terme t_1 correspondant à cette preuve.
2. Construire une preuve du séquent $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ et donner le λ-terme t_2 correspondant à cette preuve.
3. Soit t_3 le λ-terme $t_3 = \lambda w.\lambda z.(t_2\ ((t_1\ z)\ w)$.
   (a) De quelle proposition le λ-terme t_3 est-il une preuve ? Pourquoi ? Construire cette preuve. Admet-elle une coupure ? Pourquoi ? Si oui, indiquer clairement ou se situe une coupure dans cette preuve.
   (b) Soit t_4 la forme normale du λ-terme t_3. Calculer t_4. De quelle proposition le λ-terme t_4 est-il une preuve ? Pourquoi ? Cette preuve contient-elle une coupure ? Pourquoi ?
4. Parmi les λ-termes de l'ensemble $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ quels sont ceux qui :
   (a) sont α-équivalents ? (i.e. équivalents à un renommage près des variables liées)
   (b) sont β-équivalents ?
   (c) sont en forme normale ? (i.e. sur lesquels on ne peut plus effectuer de β-réduction).
5. Construire une preuve du séquent $\vdash (B \vee (A \wedge A)) \Rightarrow (A \vee B)$ et donner le λ-terme t_5 correspondant à cette preuve.

Rappels.

- Règles de typage des λ-termes.

$$(\textsc{Var})\frac{}{(x,\tau),\Gamma \vdash x : \tau} \qquad (\textsc{App})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash (t_1\ t_2) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Abs})\frac{(x,\tau_1),\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \rightarrow \tau_2} \qquad (\textsc{Pair})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (t_1, t_2) : \tau_1 \times \tau_2}$$

$$(\textsc{Fst})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(t) : \tau_1} \qquad (\textsc{Snd})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(t) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Inj}_l)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^l_{\tau_1,\tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2} \qquad (\textsc{Inj}_r)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^r_{\tau_1,\tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2}$$

$$(\textsc{Case})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 + \tau_2 \quad (x_1 : \tau_1),\Gamma \vdash t_1 : \tau \quad (x_2 : \tau_2),\Gamma \vdash t_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{case}_{\tau_1,\tau_2}\ t\ \mathsf{of}\ \mathsf{inj}^l_{\tau_1,\tau_2}(x_1) \mapsto t_1 \mid \mathsf{inj}^r_{\tau_1,\tau_2}(x_2) \mapsto t_2 : \tau}$$

- Règles de déduction.

$$(Hyp)\frac{}{A,\Gamma \vdash A} \qquad (I_\Rightarrow)\frac{A,\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad (E_\Rightarrow)\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (E^l_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad (E^r_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I^l_\vee)\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (I^r_\vee)\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (E_\vee)\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad A,\Gamma \vdash C \quad B,\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$
