Partiel – 23 Novembre 2005

Rappels.

- Règles d'inférence qui définissent la relation $=_\alpha$ d'α-équivalence entre λ-termes.

$$(R_{\alpha_1})\frac{}{t =_\alpha t} \qquad (R_{\alpha_2})\frac{y \notin \mathcal{F}(t)}{\lambda x.t =_\alpha \lambda y.t[x := y]} \qquad (R_{\alpha_3})\frac{t =_\alpha t'}{\lambda x.t =_\alpha \lambda x.t'}$$

$$(R_{\alpha_4})\frac{t =_\alpha t'}{(t\ t'') =_\alpha (t'\ t'')} \qquad (R_{\alpha_5})\frac{t =_\alpha t'}{(t''\ t) =_\alpha (t''\ t')} \qquad (R_{\alpha_6})\frac{t =_\alpha t'}{t' =_\alpha t}$$

$$(R_{\alpha_7})\frac{t =_\alpha t' \quad t' =_\alpha t''}{t =_\alpha t''} \qquad (R_{\alpha_8})\frac{t_1 =_\alpha t_1'}{(t_1, t_2) =_\alpha (t_1', t_2)} \qquad (R_{\alpha_9})\frac{t_2 =_\alpha t_2'}{(t_1, t_2) =_\alpha (t_1, t_2')}$$

$$(R_{\alpha_{10}})\frac{t =_\alpha t'}{\mathsf{fst}(t) =_\alpha \mathsf{fst}(t')} \qquad (R_{\alpha_{11}})\frac{t =_\alpha t'}{\mathsf{snd}(t) =_\alpha \mathsf{snd}(t')}$$

- Règles de typage des λ-termes.

$$(\textsc{Var})\frac{}{(x, \tau), \Gamma \vdash x : \tau} \qquad (\textsc{App})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash (t_1\ t_2) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Abs})\frac{(x, \tau_1), \Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \to \tau_2} \qquad (\textsc{Pair})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (t_1, t_2) : \tau_1 \times \tau_2}$$

$$(\textsc{Fst})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(t) : \tau_1} \qquad (\textsc{Snd})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(t) : \tau_2}$$

- Règles de déduction.

$$(Hyp)\frac{}{A, \Gamma \vdash A} \qquad (I_\Rightarrow)\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad (E_\Rightarrow)\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (E^l_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad (E^r_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

Exercice 1 On définit les λ-termes suivants :

$$\boldsymbol{K} = \lambda x.\lambda y.x \qquad \boldsymbol{I} = \lambda x.x$$

Le λ-terme $(\boldsymbol{K}\ (\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{I}))$ admet-il une forme normale ? Si oui, donner deux séquences de β-réduction différentes qui permettent d'obtenir cette forme normale.

Exercice 2 Montrer que deux λ-termes α-équivalents admettent le même ensemble de variables libres :

$$\forall t_1, t_2 \in \Lambda \quad t_1 =_\alpha t_2 \Rightarrow \mathcal{F}(t_1) = \mathcal{F}(t_2)$$

Exercice 3 Typer le λ-terme $\lambda x.\lambda y.((\mathsf{fst}(y)\ x)\ \mathsf{snd}(y))$ (détailler l'arbre d'inférence de typage en explicitant les règles utilisées, le système de contraintes de typage associé à cet arbre, et la résolution de ce système).

Exercice 4 Construire un arbre de preuve sans coupure du séquent :

$$\vdash (A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$$

et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.