Examen – Janvier 2006

Aucun document autorisé

Rappels.

• Règles de typage des λ-termes.

$$(\textsc{Var})\frac{}{(x,\tau),\Gamma \vdash x : \tau} \qquad (\textsc{App})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash (t_1\ t_2) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Abs})\frac{(x,\tau_1),\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \to \tau_2} \qquad (\textsc{Pair})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (t_1, t_2) : \tau_1 \times \tau_2}$$

$$(\textsc{Fst})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(t) : \tau_1} \qquad (\textsc{Snd})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(t) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Inj}_l)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^l_{\tau_1,\tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2} \qquad (\textsc{Inj}_r)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^r_{\tau_1,\tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2}$$

$$(\textsc{Case})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 + \tau_2 \quad (x_1 : \tau_1),\Gamma \vdash t_1 : \tau \quad (x_2 : \tau_2),\Gamma \vdash t_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{case}_{\tau_1,\tau_2}\ t\ \mathsf{of}\ \mathsf{inj}^l_{\tau_1,\tau_2}(x_1) \mapsto t_1 \mid \mathsf{inj}^r_{\tau_1,\tau_2}(x_2) \mapsto t_2 : \tau}$$

• Règles de déduction.

$$(Hyp)\frac{}{A,\Gamma \vdash A} \qquad (I_\Rightarrow)\frac{A,\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad (E_\Rightarrow)\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (E^l_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad (E^r_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I^l_\vee)\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (I^r_\vee)\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (E_\vee)\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad A,\Gamma \vdash C \quad B,\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Exercice 1 Dans l'article sur l'intuitionnisme, Alexandre Miquel écrit :

> "*L'ensemble des entiers naturels, pour les intuitionnistes, n'est rien d'autre que l'ensemble des objets qu'il est possible de construire à l'aide de ces deux méthodes de construction, le zéro et le successeur. Pour raisonner sur les entiers, il n'est pas nécessaire de supposer que tous ceux-ci aient été déjà construits. Ce point explique que le tiers exclu soit valide dans certaines circonstances et pas dans d'autres.* "

Dans quelles circonstances le tiers exclu est-il valide en logique intuitionniste ? On pourra utiliser les deux formules suivantes pour illustrer sa réponse.

$$\begin{array}{ll} \forall n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n_2 \in \mathbb{N} & n_1 = n_2 \vee n_1 \neq n_2 \\ \forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} & x_1 = x_2 \vee x_1 \neq x_2 \end{array}$$

Exercice 2 Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 3

1. Qu'est ce qu'un radical ? Qu'est ce que la normalisation ?
2. Donner un exemple de λ-terme t (**non déja vu en cours/TD/TME**) contenant au moins un radical.
3. A quelle preuve π correspond le λ-terme t ?
4. Cette preuve admet-elle une coupure ? Pourquoi ? Si oui, construire une preuve π' en éliminant la(les) coupure(s) de π.
5. Calculer la forme normale t' de t.
6. A quelle preuve correspond t' ? Pourquoi ?