

EXAMEN LOGIQUE - 14 Janvier 2005

les exercices sont indépendants

Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée

EXERCICE 1 (Question de cours) Montrer que l'ensemble *Taut* des formules du calcul des prédicats qui sont valides pour toute interprétation (i.e. les tautologies du calcul des prédicats) n'est pas décidable. Quelle méthode avez-vous employée pour votre preuve ? \diamond

EXERCICE 2 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier positif ou nul et $bin(n)$ sa représentation binaire. Construire une machine de Turing qui, si on lui donne $\#bin(n)*$ en entrée avec la tête positionnée sur $\#$, va terminer avec $\#bin(n/2)*1$ et sa tête positionnée sur le dernier 1 lorsque n est pair, et va boucler lorsque n est impair. \diamond

EXERCICE 3 On considère les formules

$$F_1 = Q(a), F_2 = \forall x (P(x) \vee Q(x)), F_3 = \exists x (P(x) \wedge Q(x)), F_4 = \forall x (P(x) \supset P(s^2(x))).$$

On rappelle que $s^2(x)$ est une notation abrégée pour $s(s(x))$. Toutes les interprétations considérées dans les questions 1. 2. et 3. seront telles que : $E_I = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), $a_I = 0$, et $s_I(n) = n + 1$.

1. Soit l'interprétation I_1 donnée par $P_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 1$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?

2. Soit l'interprétation I_2 donnée par $P_{I_2}(n)$ faux pour tout n , et $Q_{I_2}(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. I_2 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?

3. Trouver une interprétation I qui soit modèle de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$. \diamond

EXERCICE 4 Soit F la formule $(\exists x R(x, y, z)) \wedge \forall z \forall y R(x, y, z)$.

1. $f(x, z)$ est-il substituable à x ?

2. $g(y)$ est-il substituable à z ?

3. Trouver deux formules prénexes équivalentes à F . \diamond

EXERCICE 5 On considère les formules suivantes :

$$F_1: \forall x (Cube(x) \vee Tet(x) \vee Dodec(x))$$

$$F_2: \forall x \forall y (Larger(x, y) \supset (Large(x) \vee Small(y)))$$

$$F_3: \forall x \forall y (Larger(x, y) \vee \neg Larger(x, y))$$

$$F_4: \neg \exists x \exists y (Larger(x, y) \wedge Small(x) \wedge Small(y))$$

$$F_5: \forall x \forall y \forall z ((BackOf(x, z) \wedge Between(y, x, z)) \supset BackOf(x, y))$$

$$F_6: \forall x \forall y \forall z ((Larger(x, y) \wedge \neg Larger(x, y)) \supset \neg Between(x, z, y))$$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.

2. Quelle(s) formule(s) est(sont) une(des) tautologie(s) ?

3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. \diamond

note finale de cette partie = (note/30) * 10

1.

4pts Voir cours

2. 3pts Avec les notations du logiciel Turing's World :

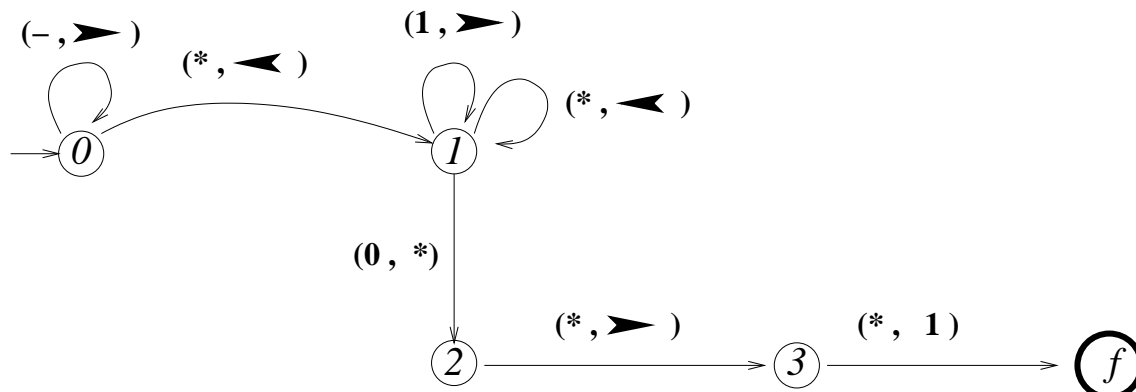


Figure 1

3. 1. 4pt N N O N

2. 4pt O N N N

3. 4pts $Q_I(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. $P_I(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 0$

4. 1. 1pt non (capture de la variable z dans $\forall z \forall y R(x, y, z)$).

2. 1pt oui Remarquer qu'on ne substitue que les occurrences libres, donc on ne substitue que dans $(\exists x R(x, y, z))$.

3. 2pts $(\exists x' \forall z \forall y (R(x', y, z)) \wedge R(x, y, z))$ et $(\forall z \exists x' \forall y (R(x', y, z)) \wedge R(x, y, z))$

5. 1pt par formule (sauf F_5 : 2pts)

(i) tautologies : F_3, F_6

(ii) formules T-valides : F_1, F_4, F_2 ,

pour falsifier F_1 : construire un univers comprenant par exemple des sphères (avec un prédicat $sphere(x)$), ou bien prendre comme interprétation \mathbb{N} avec $Cube_I(x)$, $Tet_I(x)$, $Dodec_I(x)$ qui sont vrais ssi x est pair.

pour falsifier F_2 et F_4 : prendre l'interprétation de $Larger(x, y)$ comme un ordre large (i.e. x est plus grand ou égal à y).

(iii) formules non T-valides : F_5 prendre x y z comme dans la figure 2

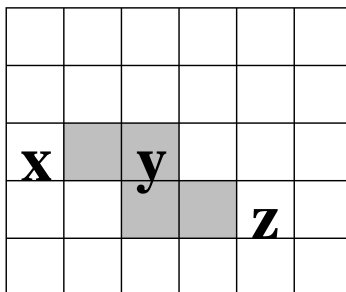


Figure 2 Contreexemple montrant que F_5 n'est pas T-valide