Examen – 23 Janvier 2008

Durée : 2 heures

Aucun document autorisé

Les sytèmes de règles de typage et de déduction utiles pour les exercices qui suivent sont rappelés à la fin du sujet.

Exercice 1 Donner une preuve sans coupure de la formule :

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B))$$

et construire le λ-terme correspondant.

Exercice 2 On ajoute aux règles de déduction du système de déduction rappelé à la fin du sujet les deux règles suivantes

$$(\exists_e)\frac{\mathcal{F} \vdash \exists x A \quad \mathcal{F}, A \vdash C \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F} \text{ et } C}{\mathcal{F} \vdash C} \qquad (\exists_i)\frac{\mathcal{F} \vdash A[x := t]}{\mathcal{F} \vdash \exists x A}$$

permettant de manipuler le quantificateur existentiel $\exists$.

1. Les deux séquents :
$$\vdash (\exists x F \wedge \exists x F') \Rightarrow \exists x(F \wedge F')$$
$$\vdash \exists x(F \wedge F') \Rightarrow (\exists x F \wedge \exists x F')$$
sont-ils universellement valides ? Si oui, en donner une preuve, sinon, trouver deux formules F et F' et définir une $\mathcal{L}$-structure qui permette de falsifier le séquent.
2. On considère le séquent S suivant :
$$\vdash ((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \Rightarrow \exists x \exists y\, (p(x) \wedge q(x,y))$$
   (a) La preuve suivante du séquent S est-elle correcte ? Pourquoi ?

(1)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash ((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y)))$	(Hypothèse)
(2)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash \exists x\, p(x)$	$E^l_\wedge$ sur (1)
(3)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash \exists x \exists y\, q(x,y)$	$E^r_\wedge$ sur (1)
(4)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))), p(x) \vdash p(x)$	(Hypothèse)
(5)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash p(x)$	$(\exists_e)$ sur (2) et (4)
(6)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))), \exists y\, q(x,y) \vdash \exists y\, q(x,y)$	(Hypothèse)
(7)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash \exists y\, q(x,y)$	$(\exists_e)$ sur (3) et (7)
(8)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))), q(x,y) \vdash q(x,y)$	(Hypothèse)
(9)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash q(x,y)$	$(\exists_e)$ sur (7) et (8)
(10)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash p(x) \wedge q(x,y)$	$(I_\wedge)$ sur (5) et (9)
(11)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash \exists y(p(x) \wedge q(x,y))$	$(\exists_i)$ sur (10)
(12)	$((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \vdash \exists x \exists y(p(x) \wedge q(x,y))$	$(\exists_i)$ sur (11)
(13)	$\vdash ((\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x \exists y\, q(x,y))) \Rightarrow (\exists x \exists y(p(x) \wedge q(x,y)))$	$(I_\Rightarrow)$ sur (12)

   (b) Pouvez vous trouver une $\mathcal{L}$-structure et une valuation qui permette de falsifier le séquent S ?

   (c) Définir une $\mathcal{L}$-structure dans laquelle le séquent S est vrai.

Exercice 3 On considère le langage $\mathcal{L} = \mathcal{G} \cup \mathcal{R}$ où $\mathcal{G}$ contient les symboles de fonction e (d'arité 0, c'est une constante) et s (d'arité 1) et où $\mathcal{R}$ contient les symboles de relation add (d'arité 3) et mult (d'arité 3). Soient les clauses suivantes :

$$\begin{array}{ll}
C_1 & \forall x\ \mathsf{add}(e, x, x) \leftarrow \\
C_2 & \forall x \forall y \forall z\ \mathsf{add}(s(x), y, s(z)) \leftarrow \mathsf{add}(x, y, z) \\
C_3 & \forall x\ \mathsf{mult}(e, x, e) \leftarrow \\
C_4 & \forall x \forall y \forall z \forall w\ \mathsf{mult}(s(x), y, z) \leftarrow \mathsf{mult}(x, y, w), \mathsf{add}(x, w, z)
\end{array}$$

A partir de ces quatre clauses, prouver par SLD-réfutation la formule $\exists x\ \mathsf{mult}(s(e), e, x)$. Quelle valeur de x cette preuve calcule-t-elle ? Donner une interprétation possible des symboles e, s, add et mult.

Rappels.

• Règles de typage des λ-termes.

$$(\textsc{Var})\frac{}{(x, \tau), \Gamma \vdash x : \tau} \qquad (\textsc{App})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash (t_1\ t_2) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Abs})\frac{(x, \tau_1), \Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \to \tau_2} \qquad (\textsc{Pair})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (t_1, t_2) : \tau_1 \times \tau_2}$$

$$(\textsc{Fst})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(t) : \tau_1} \qquad (\textsc{Snd})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(t) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Inj}_l)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^l_{\tau_1, \tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2} \qquad (\textsc{Inj}_r)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^r_{\tau_1, \tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2}$$

$$(\textsc{Case})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 + \tau_2 \quad (x_1 : \tau_1), \Gamma \vdash t_1 : \tau \quad (x_2 : \tau_2), \Gamma \vdash t_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{case}_{\tau_1, \tau_2}\ t\ \mathsf{of}\ \mathsf{inj}^l_{\tau_1, \tau_2}(x_1) \mapsto t_1 \mid \mathsf{inj}^r_{\tau_1, \tau_2}(x_2) \mapsto t_2 : \tau}$$

• Règles de déduction.

$$(Hyp)\frac{}{A, \Gamma \vdash A} \qquad (I_\Rightarrow)\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad (E_\Rightarrow)\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (E^l_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad (E^r_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I^l_\vee)\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (I^r_\vee)\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (E_\vee)\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad A, \Gamma \vdash C \quad B, \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$