Examen – 19 Décembre 2007

Durée : 2 heures

Aucun document autorisé

Le sytème de règles de déduction utiles pour les exercices qui suivent est rappelé à la fin du sujet.

Exercice 1 Soit la formule φ :

$$(\forall x \exists y\ (p(f(x,y)) \vee q(z,w,y))) \wedge (\forall y \exists z\ (\neg p(f(w,w)) \wedge q(y,x,z)))$$

1. Trouver un terme t_1 contenant au moins une variable appartenant à l'ensemble $\{w,x,y,z\}$ tel que t_1 soit substituable à z dans φ.
2. Trouver un terme t_2 contenant au moins une variable appartenant à l'ensemble $\{w,x,y,z\}$ tel que t_2 ne soit pas substituable à z dans φ. Quelle transformation sur la formule φ est envisageable pour que t_2 devienne substituable à z dans cette formule ?

Exercice 2 En utilisant les règles de déduction rappelées à la fin du sujet, prouver que l'on peut utiliser la règle :

$$(Cut)\frac{\mathcal{F} \vdash A \quad \mathcal{F}', A \vdash C}{\mathcal{F}, \mathcal{F}' \vdash C}$$

pour prouver des séquents (i.e. montrer que si l'on dispose des preuves des deux séquents $\mathcal{F} \vdash A$ et $\mathcal{F}' A \vdash C$, alors, en utilisant uniquement les règles rappelées, on peut prouver le séquent $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \vdash C$). En déduire la transitivité de la relation $\vdash$:

$$(Trans)\frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C}$$

Exercice 3 Les règles de déduction rappelées à la fin du sujet permettent de montrer que l'on peut utiliser les règles suivantes pour prouver des séquents :

$$(E_\vee)\frac{\mathcal{F} \vdash A \vee B \quad A, \mathcal{F} \vdash C \quad B, \mathcal{F} \vdash C}{\mathcal{F} \vdash C}$$

$$(I_\vee^l)\frac{\mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F} \vdash F \vee F'} \qquad (I_\vee^r)\frac{\mathcal{F} \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \vee F'}$$

1. Les deux séquents :
   $$\vdash (\forall x F \vee \forall x F') \supset \forall x (F \vee F')$$
   $$\vdash \forall x (F \vee F') \supset (\forall x F \vee \forall x F')$$
   sont-ils universellement valides ? Si oui, en donner une preuve en utilisant uniquement les règles du système 2 et éventuellement les règles $(E_\vee)$, $(I_\vee^r)$ et $(I_\vee^l)$, sinon, trouver deux formules F et F' et définir une $\mathcal{L}$-structure qui permette de falsifier le séquent.
2. On considère le séquent S suivant :

$$\vdash ((\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y))) \supset \forall x \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$$

(a) La preuve suivante du séquent S est-elle correcte ? Pourquoi ?

(1)	$\forall y\, q(x,y), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall y\, q(x,y)$	(Hypothèse)
(2)	$\forall y\, q(x,y), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash q(x,y)$	(Instance)
(3)	$\forall y\, q(x,y), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash p(x) \vee q(x,y)$	$(I^r_\vee)$
(4)	$\forall y\, q(x,y), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$	(Généralisation)
(5)	$\forall y\, q(x,y), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall x \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$	(Généralisation)
(6)	$\forall x\, p(x), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall x\, p(x)$	(Hypothèse)
(7)	$\forall x\, p(x), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash p(x)$	(Instance)
(8)	$\forall x\, p(x), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash p(x) \vee q(x,y)$	$(I^l_\vee)$
(9)	$\forall x\, p(x), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$	(Généralisation)
(10)	$\forall x\, p(x), (\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall x \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$	(Généralisation)
(11)	$(\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash ((\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y))$	(Hypothèse)
(12)	$(\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y)) \vdash \forall x \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$	$(E_\vee)$ avec (11), (5) et (10)
(13)	$\vdash ((\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(x,y))) \supset \forall x \forall y\, (p(x) \vee q(x,y))$	(Synthèse)

(b) Pouvez vous trouver une $\mathcal{L}$-structure et une valuation qui permette de falsifier le séquent S ?

(c) Définir une $\mathcal{L}$-structure dans laquelle le séquent S est vrai.

Exercice 4 On considère le langage $\mathcal{L} = \mathcal{G} \cup \mathcal{R}$ où $\mathcal{G}$ contient les symboles de fonction e (d'arité 0, c'est une constante) et f (d'arité 2) et où $\mathcal{R}$ contient les symboles de relation append (d'arité 3) et reverse (d'arité 1). Soient les clauses suivantes :

C_1 $\forall x\ \mathsf{append}(e, x, x) \leftarrow$
C_2 $\forall x \forall y \forall z \forall w\ \mathsf{append}(f(x,y), z, f(x,w)) \leftarrow \mathsf{append}(y, z, w)$
C_3 $\mathsf{reverse}(e, e) \leftarrow$
C_4 $\forall x \forall y \forall z \forall w\ \mathsf{reverse}(f(x,y), z) \leftarrow \mathsf{reverse}(y, w), \mathsf{append}(w, f(x, e), z)$

A partir de ces quatre clauses, prouver par SLD-réfutation la formule $\exists x\ \mathsf{reverse}(f(a, f(b, e)), x)$. Quelle valeur de x cette preuve calcule-t-elle ? Donner une interprétation possible des symboles f, e, append et reverse.

Rappel : Règles de déduction.

$$(\text{Hypothèse})\frac{}{\mathcal{F}, F \vdash F} \qquad (\text{Augmentation})\frac{\mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F}, G \vdash F}$$

$$(\text{MP})\frac{\mathcal{F} \vdash F \supset F' \quad \mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F} \vdash F'} \qquad (\text{Synthèse})\frac{\mathcal{F}, F \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \supset F'}$$

$$(\text{Double Neg. 1})\frac{\mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F} \vdash \neg\neg F} \qquad (\text{Double Neg. 2})\frac{\mathcal{F} \vdash \neg\neg F}{\mathcal{F} \vdash F}$$

$$(\text{Absurde})\frac{\mathcal{F}, F \vdash F' \quad \mathcal{F}, F \vdash \neg F'}{\mathcal{F} \vdash \neg F} \qquad (\wedge\text{-intro})\frac{\mathcal{F} \vdash F \quad \mathcal{F} \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \wedge F'}$$

$$(\wedge\text{-elim 1})\frac{\mathcal{F} \vdash F \wedge F'}{\mathcal{F} \vdash F} \qquad (\wedge\text{-elim 2})\frac{\mathcal{F} \vdash F \wedge F'}{\mathcal{F} \vdash F'}$$

$$(\vee\text{-1})\frac{\mathcal{F}, G \vdash F \quad \mathcal{F}, \neg G \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \vee F'} \qquad (\vee\text{-2})\frac{\mathcal{F}, F \vdash G \quad \mathcal{F}, F' \vdash G}{\mathcal{F}, F \vee F' \vdash G}$$

$$(\text{Instance})\frac{\mathcal{F} \vdash \forall x F}{\mathcal{F} \vdash F[x := t]} \qquad (\text{Généralisation})\frac{\mathcal{F} \vdash F \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F}}{\mathcal{F} \vdash \forall x F}$$

$$(\exists\text{-1})\frac{\mathcal{F} \vdash \exists x F}{\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F} \qquad (\exists\text{-2})\frac{\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F}{\mathcal{F} \vdash \exists x F}$$