M1 - T.D. Logique 2

EXERCICE 1 Mettre sous forme normale conjonctive les formules suivantes :
1. $p \equiv (q \wedge \neg r)$
2. $p \supset (q \supset r)$
3. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \wedge s) \supset r)$ ♢

EXERCICE 2 En utilisant la méthode des arbres sémantiques, démontrer que :
1. $\{p \vee q \vee r,\ (p \wedge q) \supset \neg r,\ q \supset r,\ p \supset r,\ \neg(r \wedge q),\ r \supset q\}$ n'admet aucun modèle.
2. $p,\ p \supset q \models q$ et $p,\ \neg q \supset \neg p \models q$.
3. $\models ((p \supset (q \vee r)) \wedge (q \supset s) \wedge (\neg s \supset \neg r)) \supset (p \supset s)$. ♢

EXERCICE 3 Considérons l'énoncé suivant, tiré de la "Logique sans peine" de Lewis CAROLL.
- Les animaux sont toujours mortellement offensés si je ne fais pas attention à eux.
- Les seuls animaux qui m'appartiennent se trouvent dans ce pré.
- Aucun animal ne peut résoudre une devinette s'il n'a pas reçu une formation convenable dans une école.
- Quand un animal est mortellement offensé, il se met toujours à courir en tous sens et à hurler.
- Je ne fais jamais attention à un animal qui ne m'appartient pas.
- Aucun animal qui a reçu dans une école une formation convenable ne se met jamais à courir en tous sens et à hurler.
- Aucun des animaux qui se trouvent dans ce pré n'est un raton laveur.

1. Formaliser ces déclarations à l'aide de clauses utilisant les propositions atomiques suivantes:

at : je fais attention à l'animal considéré
mo : l'animal considéré est mortellement offensé
pr : l'animal considéré est dans le pré
ap : l'animal considéré m'appartient
fc : l'animal considéré a reçu une formation convenable
rd : l'animal considéré peut résoudre une devinette
ch : l'animal considéré se met à courir en tous sens et à hurler
rl : l'animal considéré est un raton laveur

2. Utilisant la méthode des arbres sémantiques, déduire des formules précédentes que les ratons laveurs ne peuvent résoudre de devinettes. ♢

EXERCICE 4 Trois individus accusés d'un crime font les témoignages suivants :
- Damien : "Laure est coupable et Marie est innocente"
- Laure : "Si Damien est coupable alors Marie l'est aussi"
- Marie : "Je suis innocente mais au moins l'un des deux autres est coupable"

1. Représenter les témoignages par un ensemble de clauses en logique des propositions ; en déduire que les témoignages sont compatibles.
2. Montrer par la méthode des arbres sémantiques que si tous disent vrai alors Laure est la seule coupable.
3. Montrer par la méthode des arbres sémantiques que si les innocents disent vrai et seulement eux, alors Damien et Marie sont coupables et Laure est innocente. ♢

EXERCICE 5 On dispose 6 écrins devant vous, 3 sont de couleur bleue et 3 de couleur noire. Pour chaque couleur, un des écrins est rond, l'autre carré et le dernier triangulaire. Trois pierres précieuses se cachent dans trois de ces écrins. Pour les gagner, il vous faut deviner quels sont ces trois écrins. On vous précise qu'un diamant se trouve dans l'un des écrins ronds, qu'un rubis se trouve dans l'un des écrins carrés et qu'une émeraude se trouve dans l'un des écrins triangulaires, enfin qu'une seule des 3 pierres est dans un écrin noir.

T.S.V.P.

1. Représenter l'ensemble des informations disponibles par un ensemble de clauses en logique des propositions et determiner les modèles de cet ensemble de clauses. Peut-on localiser ainsi au moins une des pierres ?
2. Montrer que si l'on vous informait que le diamant est dans un écrin noir alors vous pourriez sans difficulté emporter les trois pierres. ♢

On rapelle les axiomes et règles du système de Hilbert-Ackermann
(i) Les quatre formules suivantes, appelées *axiomes*, sont des théorèmes logiques.

- $(p \vee p) \supset p$, (élimination du ou)
- $p \supset (p \vee q)$, (introduction du ou)
- $(p \vee q) \supset (q \vee p)$, (commutativité du ou)
- $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$, (pre-transitivité)

(ii) Si σ est une substitution et si F est un théorème logique, alors $\sigma(F)$ est un théorème logique.
(iii) Si F et $(F \supset F')$ sont des théorèmes logiques, alors F' est un théorème logique.

(ii) et (iii) sont les *règles d'inférence*; (iii) est appelée la règle de *modus ponens*.

On dérive de ces axiomes et règles :
(i) Si $F \vee F$ est un théorème, alors F est un théorème,
(ii) Si F est un théorème, alors $F \vee G$ est un théorème,
(iii) Si $F \vee G$ est un théorème, alors $G \vee F$ est un théorème,
(iv) Si $F \supset G$ est un théorème et H une formule, alors $(H \vee F) \supset (H \vee G)$ est un théorème,
(v) (transitivité) Si $F \supset G$ et $G \supset H$ sont des théorèmes, alors $F \supset H$ est un théorème.

Exercice 6 Montrer que $p \supset p$ est un théorème du système de Hilbert–Ackermann. ♢

Exercice 7 Montrer les théorèmes suivants :
1) (a) $\bar{p} \vee p$ et (b) $p \vee \bar{p}$
2) (a) $p \supset \bar{\bar{p}}$ et (b) $\bar{\bar{p}} \supset p$
3) $(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p})$
4) Si $p \supset q$ et $q \supset p$ sont des théorèmes, et $F(p)$ une formule ayant p comme sous-formule, alors $F(p) \supset F(q)$ et $F(q) \supset F(p)$ sont des théorèmes. ♢

Exercice 8 Montrer que si $F \supset (G \supset H)$ est un théorème du système de Hilbert–Ackermann, alors $G \supset (F \supset H)$ et $F \wedge G \supset H$ sont des théorèmes du système de Hilbert–Ackermann. ♢

Avant d'aborder les exercices suivants, nous rappelons le système formel d'Hilbert pour la logique des propositions. Ce système n'utilise que les connecteurs $\neg$ et $\supset$. Il est caractérisé par 3 schémas d'axiomes et une règle d'inférence (modus ponens) qui sont rappelés ci-dessous :

- schémas d'axiomes

SA1 : $A \supset (B \supset A)$
SA2 : $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
SA3 : $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

- règle : $A,\ A \supset B \vdash B$ (modus ponens)

Exercice 9 Justifier chaque étape des démonstrations ci-dessous dans le système formel d'Hilbert pour la logique des propositions et identifier le résultat démontré :

1. F_1 : $p \supset ((p \supset p) \supset p)$ $(\ldots)$
F_2 : $(p \supset ((p \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p))$ $(\ldots)$
F_3 : $(p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p))$ $(\ldots)$
F_4 : $p \supset (p \supset p)$ $(\ldots)$
F_5 : $p \supset p$ $(\ldots)$

2. F_1 : p $(\ldots)$
F_2 : $\neg q \supset r$ $(\ldots)$
F_3 : $\neg\neg p \supset \neg r$ $(\ldots)$
F_4 : $(\neg\neg p \supset \neg r) \supset (r \supset \neg p)$ $(\ldots)$
F_5 : $r \supset \neg p$ $(\ldots)$
F_6 : $(r \supset \neg p) \supset (\neg q \supset (r \supset \neg p))$ $(\ldots)$
F_7 : $\neg q \supset (r \supset \neg p)$ $(\ldots)$
F_8 : $(\neg q \supset (r \supset \neg p)) \supset ((\neg q \supset r) \supset (\neg q \supset \neg p))$ $(\ldots)$
F_9 : $(\neg q \supset r) \supset (\neg q \supset \neg p)$ $(\ldots)$
F_{10} : $\neg q \supset \neg p$ $(\ldots)$
F_{11} : $(\neg q \supset \neg p) \supset (p \supset q)$ $(\ldots)$
F_{12} : $p \supset q$ $(\ldots)$
F_{13} : q $(\ldots)$

$\diamondsuit$

Exercice 10 En utilisant le théorème de déduction rappelé ci-dessous :

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \text{ alors } A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \supset B)$$

établir les théorèmes suivants :

- $\vdash B \supset ((B \supset C) \supset C)$
- $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
- $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$ $\diamondsuit$

Exercice 11 Démontrer les théorèmes suivants dans le système formel d'Hilbert pour la logique des propositions :

- $\vdash \neg B \supset (B \supset C)$
- $\vdash \neg\neg B \supset B$
- $\vdash B \supset \neg\neg B$
- $\vdash (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ $\diamondsuit$

Exercice 12 Considérons l'énoncé suivant : *"Si l'assemblée ne prend pas de nouvelles dispositions, la grève ne se terminera pas, à moins qu'elle dure depuis plus d'une année et que le président soit démis de ses fonctions. Sachant que l'assemblée refuse d'agir, la grève qui vient de commencer (c'est-à-dire qui dure depuis moins d'un an) se terminera t-elle ?"*

1. Formaliser les informations données dans le système formel d'Hilbert en faisant appel uniquement aux propositions suivantes :

p : l'assemblée ne prend pas de nouvelles dispositions

l : la grève se terminera

a : la grève dure depuis plus d'une année

d : le président est démis de ses fonctions

2. Montrer que la réponse que vous souhaitez faire à cette question se dérive formellement des informations données dans l'énoncé (on fera une preuve dans le système formel d'Hilbert).
3. Retrouver le résultat précédent par une approche sémantique. $\diamondsuit$

Exercice 13 Pour justifier la composition de son équipe de Football, l'entraîneur tient le raisonnement suivant : *"Pour que l'attaque soit dangereuse, il suffit qu'Eric et Henri jouent le match. Si Clément et Olivier jouent le match, alors le milieu sera fort et la défense sera solide. En fait, nous perdrons le match seulement si le milieu est faible ou l'attaque inoffensive. Comme Eric, Henri, Clément et Olivier vont jouer le match, l'équipe va l'emporter ou au pire faire match nul."*

1. Modéliser ce raisonnement en logique des propositions. On prendra soin d'utiliser les notations suivantes:

e : Eric joue le match

h : Henri joue le match

c : Clément joue le match

o : Olivier joue le match

a : L'attaque sera dangereuse

m : Le milieu sera fort

d : La défense sera solide

p : L'équipe va perdre

2. Démontrer, dans le système formel d'Hilbert pour la logique des propositions la validité du raisonnement mené par l'entraîneur (on prendra soin de reformuler les déclarations de l'entraîneur dans le système formel d'Hilbert).

3. En utilisant la méthode des arbres sémantiques, redémontrer la validité du raisonnement ci-dessus. $\diamondsuit$