M1 - T.D. Logique

Exercice 1 Mettre en forme normale disjonctive et conjonctive

$\neg(p \wedge \neg(q \vee s))$

$\neg(p \wedge (q \vee s))$

$\neg(p \vee (q \wedge \neg s)) \wedge s$ $\diamondsuit$

Exercice 2 Mettre sous forme normale conjonctive les formules suivantes :

1. $p \equiv (q \wedge \neg r)$
2. $p \supset (q \supset r)$
3. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \wedge s) \supset r)$

$\diamondsuit$

Exercice 3 Les formules peuvent être écrites en notation infixe (cours) ou préfixe, et on omet parfois les parenthèses. Parmi les mots suivants, écrits en notation préfixe, reconnaitre ceux qui sont des formules, les écrire en notation infixe et dessiner l'arbre syntaxique les représentant.

1. $\supset \neg p \vee qr$;
2. $\supset \neg pq \vee r$;
3. $\supset \neg \supset \vee \wedge pqrs \vee st$;
4. $\supset \vee \neg pqr$;
5. $\supset \neg ps \vee qr$. $\diamondsuit$

Exercice 4 Définissons $F \wedge F' \overset{\text{def}}{=} \neg(F \supset \neg F')$ et $F \vee F' \overset{\text{def}}{=} \neg F \supset F'$.

1) Ecrire les tables donnant les valeurs de vérité de $\supset, \wedge, \vee$. En déduire que

$$I(F \wedge F') = I(F).I(F') \quad \text{et} \quad I(F \vee F') = I(F) + I(F')\,.$$

2) Montrer que

$$\begin{aligned} I\big(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset F)\cdots))\big) &= \overline{I(F_n)} + \overline{I(F_{n-1})} + \cdots + \overline{I(F_1)} + I(F) \\ &= I\big(\neg F_n \vee (\neg F_{n-1} \vee (\cdots \vee (\neg F_1 \vee F)\cdots))\big) \end{aligned}$$

En déduire que

$$I\big(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset F)\cdots))\big) = I\big((F_n \wedge (F_{n-1} \wedge (\cdots \wedge (F_2 \wedge F_1))\cdots)) \supset F\big).$$ $\diamondsuit$

Exercice 5 Vérifier que F est insatisfaisable si et seulement si $\neg F$ est valide. $\diamondsuit$

Exercice 6 Construire la table de vérité de XOR. $\diamondsuit$

Exercice 7 On suppose un univers partitionné en 4 types d'individus

- chat heureux
- chat malheureux
- souris heureuse
- souris malheureuse

T.S.V.P.

On choisit une espèce (chat , souris) et une attitude (heureux, malheureux) ; on dit qu'un type est OK s'il a soit l'espèce choisie, soit l'attitude choisie, mais pas les deux. Sachant qu'un chat malheureux est OK, quel(s) autre(s) type(s) sont OK ? ♢

Exercice 8 Il y a 2 types d 'individus, les chevaliers (disant toujours la vérité) et les fripons (mentant toujours). Il y a 3 personnes, p, q, r qui sont de l'un des 2 types. p dit "q est un fripon", et q dit "p et r sont du même type". De quel type est r ? ♢

Exercice 9 Montrer que l'on peut exprimer tous les connecteurs logiques à l'aide du $NAND$, défini par $x \ NAND \ y = \neg(x \wedge y)$. ♢

Exercice 10 1) Soient

$$p = \text{“il pleut”}$$

$$q = \text{“il y a des nuages”}$$

Ecrire l'implication $p \Longrightarrow q$ ainsi que sa contraposée, sa réciproque et la contraposée de sa réciproque. Quelles implications sont vraies ?

2) On considère les formules $p = \big(\forall x \in A \ , \ \exists y \in B \ , \ P(x,y)\big)$ et $q = \big(\exists y \in B \ , \ \forall x \in A \ , \ P(x,y)\big)$ où :

– A est l'ensemble des hommes,

– B est l'ensemble des femmes,

– $P(x,y)$ signifie "y aime x".

Que peut-on dire de $p \Longrightarrow q$? De sa réciproque ? ♢

Exercice 11 Un logicien dit à son fils : "si tu ne manges pas ta soupe, tu ne regarderas pas la télévision" ; le fils mange sa soupe, et est envoyé au lit tout de suite après. Quelle erreur avait-il faite en pensant regarder la télévision après dîner ? ♢

Exercice 12 Montrer l'assertion "si x n'est pas divisible par 4, alors soit x est impair, soit $x = 2y$ avec y impair. On utilisera :

p : x est divisible par 4,

q : x est impair,

r : $x = 2y$ avec y impair.

1) Utiliser la contraposée.

2) Faire une preuve par cas : si s est conséquence à la fois de p_1, et de p_2, et ... et de p_n, et si l'un des p_i est vrai, alors s est vrai. ♢

Exercice 13 1) On interroge un logicien, qui de plus dit toujours la vérité, sur sa vie sentimentale, et il énonce les deux affirmations suivantes

(a) J'aime Marie ou j'aime Anne.

(b) Si j'aime Marie, alors j'aime Anne.

Que peut-on en conclure : aime-t-il Marie, Anne, ou les deux ?

2) Si le même logicien avait répondu à la question : "Est-il vrai que si vous aimez Marie, alors vous aimez Anne ?" par

(a) Si c'est vrai, alors j'aime Marie.

(b) Si j'aime Marie, alors c'est vrai.

qu'en auriez-vous conclu ? $\diamondsuit$

Exercice 14 1) Montrer que si une formule F des variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$ est une tautologie, la formule obtenue en remplaçant chaque p_i par $\overline{p_i}$ est aussi une tautologie.

2) Dualité. Soient deux formules F, G formées avec uniquement des $\wedge, \vee, \neg$. Montrer que si $F \equiv G$ alors, on peut permuter les $\wedge$ et $\vee$ et on obtient encore deux formules équivalentes. $\diamondsuit$

Exercice 15 Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes qu'on peut former avec n variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$? $\diamondsuit$

Exercice 16 (du livre de Lassaigne deRougemont) Soient les formules F, G, H suivantes : $p+q+r$, $pq\bar{r}$, $p\bar{q}+r$.

1) Déterminer tous les couples de formules de F, G, H tels que l'une des deux soit conséquence de l'autre.

2) $F \vee H$ est-elle conséquence de $F \vee \neg H$? $\diamondsuit$

Exercice 17 (du livre de Lassaigne deRougemont) 1) Soient la formule F suivantes : $pq\bar{r}+p\bar{q}r+\bar{p}qr$. F et $\neg F$ sont-elles satisfaisables ? Sont-elles des tautologies ?

2) Mettre F et $\neg F$ sous forme normale conjonctive (ou clausale) puis disjonctive.

3) Trouver une formule G telle $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.

4) Soit F_1 obtenue en substituant $\bar{p}$ à p dans F. F_1 est-elle conséquence de F ? F est-elle conséquence de F_1 ? $\diamondsuit$

Exercice 18 Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux ensembles de formules. On dit que $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ si et seulement si pour toute interprétation I, on a

$$I(F) = vrai \text{ pour toute } F \in \mathcal{F}$$

implique que

$$I(G) = vrai \text{ pour toute } G \in \mathcal{G} .$$

Montrer que $\left(\mathcal{F} \models \mathcal{F}' \text{ et } \mathcal{F}' \models \mathcal{F}''\right)$ implique que $\mathcal{F} \models \mathcal{F}''$. $\diamondsuit$

Exercice 19 1) Montrer qu'une formule G est vraie dans I (resp. valide) si le séquent $(\emptyset, G)$ est vrai dans I (resp. valide).

2) Les séquents suivants sont-ils valides ?

- $(\emptyset, (p \supset q))$,
- $(\{p, (p \supset q)\}, q)$. $\diamondsuit$

Exercice 20 On peut associer une formule $\phi((\mathcal{F}, G))$ à un séquent $S = (\mathcal{F}, G)$ en posant

- si $S = (\emptyset, G)$, alors $\phi(S) = G$,
- si $S = (\{F\} \cup \mathcal{F}, G)$, et $\phi((\mathcal{F}, G)) = F'$, alors $\phi(S) = (F \supset F')$.

Montrer que le séquent $S = (\mathcal{F}, G)$ est vrai dans I si et seulement si $\phi(S)$ est vraie dans I. $\diamondsuit$

Exercice 21 Quelles sont les règles utilisées dans les preuves ci-dessous. Dites en français quel est le résultat démontré.

1)
$p, q \vdash p$ (...)
$p \vdash (q \supset p)$ (...)
$\emptyset \vdash \big(p \supset (q \supset p)\big)$ (...)

2)
1. $(p \supset q), \neg q, p \vdash \neg q$ (...)
2. $(p \supset q), \neg q, p \vdash p$ (...)
3. $(p \supset q), \neg q, p \vdash p \supset q$ (...)
4. $(p \supset q), \neg q, p \vdash q$ (...)
5. $(p \supset q), \neg q \vdash \neg p$ (...)
6. $(p \supset q) \vdash (\neg q \supset \neg p)$ (...)

3)
$p, \neg p, \neg q \vdash p$ (...)
$p, \neg p, \neg q \vdash \neg p$ (...)
$p, \neg p \vdash \neg\neg q$ (...)
$p, \neg p \vdash q$ (...)
$p \vdash (\neg p \supset q)$ (...)

4)
$p \vdash p$ (...)
$\emptyset \vdash (p \supset p)$ (...)
$p \vdash (p \supset p)$ (...)
$\emptyset \vdash p \supset (p \supset p)$ (...)

$\diamondsuit$

Exercice 22 montrer que $\mathcal{F}, F \vdash G$ si et seulement si $\mathcal{F}, \neg\neg F \vdash G$. $\diamondsuit$

Exercice 23 1. On veut montrer que $\mathcal{F}, F \vdash G$ si et seulement si $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$. Quelles sont les règles utilisées dans la preuve ci-dessous de la *règle de la contraposée1* ?

1. $\mathcal{F}, F \vdash G$
2. $\mathcal{F}, F, \neg G \vdash G$ $(\ldots ?\ldots)$
3. $\mathcal{F}, F, \neg G \vdash \neg G$ $(\ldots ?\ldots)$
4. $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$ $(\ldots ?\ldots)$

2. Montrer par une preuve similaire que si $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$ alors $\mathcal{F}, F \vdash G$. (*Règle de la contraposée2*). $\diamondsuit$

Exercice 24 Comparer les preuves de $p \supset p$ et de $(p \vee p) \supset p$ par le système de Hilbert-Ackermann et le calcul des séquents. $\diamondsuit$

Exercice 25 Comparer les preuves de $(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p})$ par le système de Hilbert-Ackermann et le calcul des séquents. $\diamondsuit$

Exercice 26 Comparer les preuves de $p \supset \neg\neg p$ et de $\neg\neg p \supset p$ par le système de Hilbert-Ackermann et le calcul des séquents. $\diamondsuit$

Exercice 27 Les *formules du premier ordre* seront définies inductivement (en notation infixe) par :

– Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

– Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, et $(F \vee F')$ sont des formules.

– Si F est une formule et x est une variable, alors $\forall x F$ et $\exists x F$ sont des formules.

1. Dessiner l'arbre représentant la formule $\neg\Big((\forall x P(x)) \wedge Q(x)\Big) \supset \Big(R(x) \vee \neg P(x)\Big)$. Ecrire cette formule en notation préfixe (c'est-à-dire en mettant les opérateurs $\wedge, \supset$, etc. d'abord).

2. Donner une définition inductive de la fonction transformant la notation infixe en notation préfixe. Pouvez-vous modifier cette définition inductive pour obtenir une fonction transformant la notation infixe en un arbre représentant la formule ? $\diamondsuit$

Exercice 28 (du livre Lassaigne deRougemont) Montrer que r est conséquence de $S = \{\neg p \vee \neg q\ ,\ p\ ,\ (\neg p \vee q \vee r)\}$. En déduire une réfutation de $S \cup \{\neg r\}$. $\diamondsuit$

Exercice 29 (du livre Lassaigne deRougemont) Montrer que $F = \neg q \vee t$ est conséquence de $S = \{\neg(p \supset s)\ ,\ p \supset (\neg q \vee (r \wedge s))\}$. $\diamondsuit$

Exercice 30 (du livre Lassaigne deRougemont) Soit S l'ensemble de clauses : $p \vee \neg q \vee \neg r\ ,\ s \vee \neg q \vee \neg p\ ,\ q\ ,\ r$

1) Donner une preuve par coupure de p et s à partir de S.

2) Soit $S' = S \cup \{s \vee \neg q \vee \neg s \vee \neg t\}$. Existe-t-il une preuve par coupure de p et s à partir de S'.

3) Existe-t-il une preuve par coupure de p et t à partir de S' ?

4) $p \wedge \neg t$ est-elle conséquence de S' ? $\diamondsuit$

Exercice 31 (du livre Lassaigne deRougemont) On va noter une clause $p_1 \vee \ldots \vee p_n \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_m$ sous la forme $q_1 \ldots q_m \supset p_1 \ldots p_n$.

1) Soit S l'ensemble de clauses : $ae \supset d\ ,\ d \supset df\ ,\ ab \supset\ ,\ bd \supset d\ ,\ cd \supset af\ ,\ e \supset b\ ,\ be \supset ac\ ,\ \supset acd\ ,\ bdf \supset abd\ ,\ \supset abc$. Trouver une réfutation de S ou une valuation satisfaisant S.

2) Même question pour S' formé de $\supset ej\ ,\ bj \supset h\ ,\ \supset a\ ,\ bce \supset\ ,\ hi \supset\ ,\ \supset i\ ,\ j \supset h\ ,\ ce \supset\ ,\ i \supset bh\ ,\ i \supset ch$. $\diamondsuit$

Exercice 32 Vérifier que la règle de modus ponens est équivalente à la règle de modus tollens

$$[\neg q \text{ et } (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow \neg p$$

c'est-à-dire que l'on peut démontrer la règle de modus tollens à partir de la règle de modus ponens, et vice-versa. $\diamondsuit$

Exercice 33 Un arbre binaire de décision pour une formule du calcul propositionnel (resp. un polynôme booléen) est une représentation de l'ensemble des valeurs que peut prendre cette formule (resp. ce polynôme booléen) sous forme d'un arbre ; le but est d'avoir ensuite des moyens de simplifier cet arbre pour en tirer plus facilement des informations sur la valeur de la formule du calcul propositionnel (resp. du polynôme booléen). L'idée est de mettre à chaque feuille de l'arbre la valeur du polynôme booléen pour les valeurs de variables données par les étiquettes du chemin allant de la racine à cette feuille. Par exemple les formules $\neg a$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $b \wedge (\neg a \vee b)$, sont respectivement représentées comme suit :

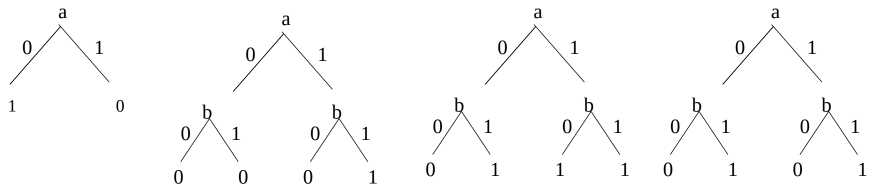

Figure 0.1

On peut simplifier le dernier arbre de la figure 0.1 qui représente la formule $b \wedge (\neg a \vee b)$ comme suit :

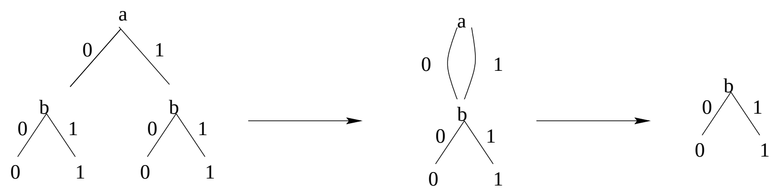

Figure 0.2

Remarquons qu'à la seconde étape on obtient un graphe et non un arbre ; cette simplification nous permet de voir 1) que $b \wedge (\neg a \vee b)$ est équivalente à b, et 2) que plusieurs arbres binaires de décision peuvent être associés à une même formule.

Par convention, dans tout cet exercice, les arêtes des arbres seront étiquetées par 0 ou 1 (l'arête gauche étant étiquetée 0 et l'arête droite étant étiquetée 1).

1. Construire un arbre binaire de décision D correspondant à l'énumération a, b, c des variables propositionnelles pour la formule $\phi = c \wedge (\neg c \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$.

2. Comparer D avec un arbre sémantique S pour ϕ et la même énumération a, b, c des variables propositionnelles.

3. Pouvez-vous simplifier D et S ?

4. Construire un arbre binaire de décision D_1 et un arbre sémantique S_1 pour $\psi = \phi \wedge \neg a$. $\diamondsuit$

Exercice 34 1. Préciser à l'aide d'un quantificateur le sens de "un" dans les phrases suivantes et formaliser les en logique des prédicats :

a) Jean suit un cours

b) Un français a été champion du monde de cyclisme

c) Un entier naturel est pair ou impair

d) Un enseignant a toujours un nouveau sujet à étudier

e) Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur

f) Dans un triangle équilatéral une médiane est également hauteur

g) Un homme a besoin d'avoir un idéal

2. Formaliser les énoncés suivants dans le langage de la logique des prédicats du premier ordre :

a) Tous les hommes sont doués de raison

b) Seuls les hommes sont doués de raison

c) Aucun homme n'est doué de raison

d) Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants

e) Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde

f) Tout homme a des amis et des ennemis

g) N'importe qui peut apprendre la logique, s'il travaille assez

3. Représenter la phrase "Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x" par une formule de la logique des prédicats en utilisant les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} \text{entier}(x) &: \text{“}x \text{ est un entier naturel”} \\ \text{successeur}(x,\ y) &: \text{“}x \text{ est successeur de } y\text{”} \\ \text{inf}(x,\ y) &: \text{“}x \text{ est inférieur ou égal à } y\text{”} \end{aligned}$$

Soit la formule : $\forall x(p(x) \supset \exists y(q(y,x) \wedge \forall z(r(z,x) \supset s(z,y))))$. Est-elle satisfaisable ? Est-elle valide ? ♢

Exercice 35 Formaliser en logique des prédicats du premier ordre chacune des phrases du texte suivant emprunté à Lewis Caroll :

Aucune des choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il ne remarque pas n'est une sirène. Les choses qui sont rencontrées en mer et qu'on inscrit sur le livre de bord sont toujours dignes d'intérêt. Personnellement, je n'ai jamais rien rencontré, au cours de mes voyages en mer, qui soit digne d'intérêt. Les choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il remarque sont toujours inscrites sur le livre de bord.

Que peut-on dire des choses rencontrées en mer ? Formaliser votre réponse (on pourra ultérieurement justifier la réponse par résolution). ♢

Exercice 36 Déterminer les variables libres et les variables liées dans les formules suivantes :

- $A = p(f(x,y)) \vee \forall z\ r(a,z)$
- $B = \forall x\ p(x,y,z) \vee \forall z\ (p(z) \supset r(z))$
- $C = \forall x\ \exists y\ (p(x,y) \supset \forall z\ r(x,y,z))$

Quelles sont les formules closes parmi A, B, C ? ♢

Exercice 37 1. Effectuer la substitution $\sigma = x/f(y,u)$ dans la formule $A = p(x) \vee \forall y\ \exists x\ r(x,y)$

2. Soient $\sigma_1 = x/f(y)$, $\sigma_2 = y/g(z)$, $\sigma_3 = z/f(x)$ trois substitutions élémentaires. Appliquer les substitutions $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$, $\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_3$ et $\sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2$ à la formule $B = p(x,y,z)$. Que peut-on conclure ? ♢

Exercice 38 On se place dans le cadre d'une algèbre de termes où x, y, z, u, v, w sont des symboles de variables, a un symbole de constante, f, g, p des symboles d'opérateurs ou fonctions d'arités respectives 1, 2 et 3. Pour chacun des couples de termes (t_1, t_2) suivants, examiner si $t_2 = \sigma(t_1)$, pour une substitution σ, et si t_1 et t_2 sont unifiables.

1) $t_1 : p(x,\ f(y),\ g(f(u),\ w))$ et $t_2 : p(z,\ f(f(a)),\ g(f(g(a,z)),\ v))$

2) $t_1 : p(x,\ f(x),\ g(f(y),\ x))$ et $t_2 : p(z,\ f(f(a)),\ g(f(g(a,z)),\ v))$

3) $t_1 : p(x,\ f(x),\ g(f(x),\ x))$ et $t_2 : p(z,\ f(f(a)),\ g(f(g(a,z)),\ v))$

Peut-on trouver deux termes t_1 et t_2 tels que $t_1 = \sigma(t_2)$, mais t_1 et t_2 ne sont pas unifiables ? ♢

Exercice 39 Dans chacun des cas suivants, unifiez les termes $t_j,\ j \in \{1,2,3\}$

1) $t_1 : p(x',\ y',\ z')$
$t_2 : p(f(g(x,y)),\ g(v,w),\ y)$
$t_3 : p(f(z),\ x,\ f(x))$
:
2) $t_1 : p(x,\ f(y),\ f(f(z)))$
$t_2 : p(f(z),\ f(f(x)),\ y)$
$t_3 : p(f(f(y)),\ z,\ f(x))$

$\diamondsuit$

Exercice 40 Soit F la formule $(\exists y R(x,y)) \supset \forall x \forall z (R(x,z) \vee R(y,z))$.

1. $f(x,y)$ est-il substituable à x ?
2. $g(x,z)$ est-il substituable à y ?
3. $f(x,z)$ est-il substituable à x ? $\diamondsuit$

Exercice 41 1. Donner une forme prénexe de $(\forall x \exists y R(x,y)) \supset (\forall x \exists y Q(x,y))$. Pouvez-vous donner une autre forme prénexe de la même formule ?

2. Skolemiser les formules obtenues à la question 1. $\diamondsuit$

Exercice 42 Soit F la formule $(\exists x R(x,y)) \wedge \forall y \exists z (R(x,z) \vee R(y,z))$.

1. $f(x)$ est-il substituable à x ?
2. $g(x,z)$ est-il substituable à y ?
3. $f(x,z)$ est-il substituable à x ?
4. Trouver deux formules prénexes équivalentes à F
5. Skolemiser les formules obtenues à la question 4. $\diamondsuit$

Exercice 43 Unifier $t = k(f(c, g(x_4, x_5)), f(c, g(x_5, x_4)), k(x_5, x_4, x_2))$ et $t' = k(x_2, x_2, x_6)$. $\diamondsuit$

Exercice 44 Trouver des Skolemisations de $F = (\forall x R(x)) \vee (\exists y R'(y))$. $\diamondsuit$

Exercice 45 Trouver des Skolemisations de

$$F = (\forall x \exists y R(x,y)) \vee \neg(\exists x \forall y R'(x,y)).$$

$\diamondsuit$

Exercice 46 *Filtrage et Systèmes de réécriture*

Considérons le système formel de Péano (SFP) dans lequel les symboles fonctionnels sont la constante 0, la fonction unaire s (successeur), la fonction binaire +. Considérons alors les règles de réécriture suivantes :

$R_1 : +(x,\ 0) \rightarrow x$
$R_2 : +(x,\ s(y)) \rightarrow s(+(x,\ y))$

1. Vérifier dans SFP que 2 + 2 font 4.

2. En ajoutant la règle $R_3 : +(0,\ s(x)) \rightarrow s(x)$ aux deux précédentes, que peut-on obtenir à partir de $+(0,\ s(s(z)))$? $\diamondsuit$

Exercice 47 On se place dans le système formel de la logique des propositions ; dans chacun des cas ci-dessous, appliquer si possible le méta-théorème MT_i à l'expression E (ou aux expressions E et E') donnée(s). Quel(s) résultat(s) donne alors l'application de MT_i ?

1) $E : (p \supset (q \supset p))$
$MT_1 : ((A \supset B) \supset C) \vdash (B \supset C)$
2) $E : (a \supset b) \supset ((c \supset a) \supset (c \supset b))$
$MT_2 : (A \supset ((A \supset B) \supset B)) \vdash (A \supset B)$
3) $E : (p \supset q) \supset r) \supset (q \supset r)$ et $E' : (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
$MT_3 : A \supset B), (B \supset C) \vdash (A \supset C)$

$\diamondsuit$

Exercice 48 On se donne un langage comprenant l'égalité ainsi qu'un autre symbole de relation binaire R. Soit la formule $\forall x \forall y (R(x, y) \supset x \neq y)$

1. cette formule admet-elle un modèle à un seul élément (i.e. est-elle *satisfaisable* dans une $\mathcal{L}$-structure dont l'ensemble de base n'a qu'un seul élément) ?
2. combien admet-elle de modèles à deux éléments ?
3. si l' ensemble de base est l'ensemble des entiers, peut-on
   - interpréter R par la relation de divisibilité $R(n, m)$ ssi *"n divise m" ssi m mod $n = 0$* et satisfaire notre formule ?
   - interpréter R par la relation de divisibilité $R(n, m)$ ssi *"m divise n"* et satisfaire notre formule ?

$\diamondsuit$

Exercice 49 Mêmes questions avec la formule $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge x \neq y)$. $\diamondsuit$

Exercice 50 Un monde de Tarski infini. On représente la grille du monde de Tarski par l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des coordonnées ligne et colonne. La case $(0, 0)$ est en haut à gauche. Une figure est représentée par son nombre de face (4, 6 ou 12) et sa taille par l'entier 0, 1 ou 2.

1. donnez une définition d'un ensemble T permettant de représenter une figure dans le monde de Tarski.
2. proposez une interprétation des prédicats `Tet Cube Dodec Small Medium Large Smaller Larger LeftOf RightOf BackOf FrontOf Between`
3. écrire, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski, et uniquement ceux-ci*, les définitions des formules suivantes :
   (i) $LessFig[x, y]$ pour *"x est une figure strictement plus petite que y"* (fonction du nombre de faces).
   (ii) $EqFig[x, y]$ pour *"x et y sont la même figure"*.
   (iii) $EqSize[x, y]$ pour *"x est de la même taille que y"*.
   (iv) $\Phi[x, y]$ qui donne l'ordre lexicographique (strict) sur l'ensemble T (on utilisera les définitions ci-dessus, et le nombre de faces est prioritaire par rapport à la taille, c'est-à-dire qu'un petit dodécaèdre est supérieur à un grand carré par exemple). $\diamondsuit$

Exercice 51 On considère les formules suivantes :

$F_1: \forall x \forall y (LeftOf(x, y) \supset RightOf(y, x))$

$F_2: \forall x \forall y ((Small(x) \wedge Small(y) \wedge BackOf(x, y)) \supset Dodec(x))$

$F_3: \forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \supset (Larger(x, y) \vee Smaller(x, y)))$

$F_4: \forall x \forall y \forall z ((Smaller(x, y) \wedge Smaller(y, z)) \supset Smaller(x, z))$

$F_5: \forall x \forall y (Larger(x, y) \supset x \neq y)$

F_6: $\forall x \forall y \forall z(Between(x,y,z) \vee \neg Between(x,y,z))$

F_7: $\forall x \forall y \forall z(Between(x,y,z) \vee \neg Between(x,z,y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.

2. Quelle formule est une tautologie ?

3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. ♢

Exercice 52 1. Soit l'énoncé *"il existe un entier impair divisible par 3"*. Dites pourquoi la formule $\exists x(EntierImpair(x) \supset DivisiblePar(3,x))$ n'est pas fidèle à cet énoncé ? Donnez la traduction correcte.

2. Donnez des contre-modèles (i.e. des interprétations qui les rendent fausses) des formules

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \supset (\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$;
- $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))$.

3. montrez que

a) $\exists x(A(x) \supset B(x))$ est conséquence de $(\forall x A(x)) \supset \exists x B(x)$;

b) et réciproquement ♢

Exercice 53 Soient les formules

(1) $\forall x(\neg R(x,x) \wedge \forall y((R(x,y) \supset \neg R(y,x)) \wedge \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))))$

(2) $\exists x \forall y R(x,y)$

(3) $\forall x \exists y R(x,y)$

(4) $\exists x \forall y R(y,x)$

(5) $\forall x \exists y R(y,x)$

(6) $\forall x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \supset (z = y \vee R(y,z))))$

(7) $\forall x \forall y(R(x,y) \supset \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$

Dites si oui ou non chacune des formules ci-dessus est valide dans les interprétations ci-dessous

(i) les entiers naturels (positifs) comme domaine et $<$ pour R.

(ii) les entiers relatifs comme domaine et $<$ pour R.

(iii) les rationnels comme domaine et $<$ pour R.

(iv) l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ comme domaine et $\subset$ (l'inclusion stricte) pour R.

(v) l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ comme domaine et $\subseteq$ (l'inclusion large) pour R.

Montrer que $\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall x \exists y R(y,x)$ et $\exists x \forall y R(y,x) \supset \forall x \exists y R(x,y)$. Les réciproques sont-elles vraies ? ♢

Exercice 54 Mettre sous forme prénexe

1. pour mémoire, si A et B ne contiennent pas de quantificateurs : $\neg \forall x A(x)$, $\neg \exists x A(x)$, $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$, $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$, $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$, $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$, $\forall x A(x) \supset \forall x B(x)$ et $\exists x A(x) \supset \exists x B(x)$.

2. $\exists x(P(x) \supset \forall x P(x))$.

3. $\exists x P(x) \wedge \forall x(\exists y Q(y) \supset R(x))$.

4. $\forall x \exists y R(x,y) \wedge \forall x \forall y (R(x,y) \supset \forall z (R(x,z) \supset z = y))$.

5. dans le langage de la théorie des ensembles, avec le prédicat $\in$ et l'opération ensembliste $\times$ ainsi que les symboles Fonc (pour *"est une fonction"*) et Dom (pour *"domaine de"*) et les abréviations $\forall x \in a.A$ pour $\forall x(x \in a \supset A)$ et $\exists x \in a.A$ pour $\exists x(x \in a \wedge A)$:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall r \ \big(((\forall z \in r. z \in x \times y) \wedge (\forall z \in x. \exists w \in y. (z,w) \in r)) \\ \supset \exists f(\mathrm{Fonc}(f) \wedge \mathrm{Dom}(f) = x \wedge \forall z \in x. \forall w((z,w) \in f \supset (z,w) \in r))\big)\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

EXERCICE 55 Formaliser : *Il existe quelqu'un dont l'exemple est suivi par tous*, i.e. s'il fait quelque chose, alors tout le monde fait la même chose ? (Un faiseur de mode universel) $\diamondsuit$

EXERCICE 56 On considère les formules
$F_1 = Q(a)$, $F_2 = \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$, $F_3 = \exists x\, \neg(P(x) \wedge Q(x))$, $F_4 = \forall x\,(P(x) \supset P(s^3(x)))$.

On rappelle que $s^3(x)$ est une notation abrégée pour $s(s(s(x)))$. Toutes les interprétations considérées dans les questions 1. 2. et 3. seront telles que : $E_I = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), $a_I = 0$, et $s_I(n) = n + 1$.

1. Soit l'interprétation I_1 donnée par $P_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 1$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?

2. Soit l'interprétation I_2 donnée par $P_{I_2}(n)$ faux pour tout n , et $Q_{I_2}(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?

3. Trouver deux interprétations I qui soient modèles de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 57 Soit E un ensemble muni de 2 relations (prédicats) binaires $arc, chem$ et 3 constantes a, b, c. On considère l'ensemble P de formules :

$$\begin{array}{rl} & arc(a,b) \\ & arc(b,c) \\ \forall x & chem(x,x) \\ \forall x,y & chem(x,y) \vee \neg arc(x,y) \\ \forall x,y,z & chem(x,y) \vee \neg arc(x,z) \vee \neg chem(z,y) \end{array}$$

Trouver 2 modèles différents de P. $\diamondsuit$

EXERCICE 58 Trouver tous les modèles de Herbrand de

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{ & arc(a,b) \quad , \quad arc(b,c) \quad , \quad \forall x \forall y \big(arc(x,y) \supset chemin(x,y)\big) \quad , \\ & \forall x \forall y \big((arc(x,z) \wedge chemin(z,y)) \supset chemin(x,y)\big)\} \ ,\end{aligned}$$

où le langage $\mathcal{L}$ consiste des constantes a, b, c, et des symboles de relations binaires arc et $chemin$. Avec les notations de PROLOG, $\mathcal{F}$ serait noté par :

$$\begin{array}{lrl} r_1 : & & \Longrightarrow arc(a,b) \\ r_2 : & & \Longrightarrow arc(b,c) \\ r_3 : & arc(X,Y) & \Longrightarrow chemin(X,Y) \\ r_4 : & arc(X,Z), chemin(Z,Y) & \Longrightarrow chemin(X,Y) \end{array}$$

où les quantifications universelles sont omises et la virgule dénote $\wedge$. $\diamondsuit$

Dans les exercices qui suivent, les seules règles utilisables sont celles du calcul des séquents, vues en cours et rappelées ci-dessous :

(Hypothèse) : $\dfrac{}{\mathcal{F}, F \vdash F}$	(Augmentation) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F}, G \vdash F}$
(MP) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F \supset F' \quad \mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F} \vdash F'}$	(Synthèse) : $\dfrac{\mathcal{F}, F \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \supset F'}$
(Double Neg. 1) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F}{\mathcal{F} \vdash \neg\neg F}$	(Double Neg. 2) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash \neg\neg F}{\mathcal{F} \vdash F}$
(Absurde) : $\dfrac{\mathcal{F}, F \vdash F' \quad \mathcal{F}, F \vdash \neg F'}{\mathcal{F} \vdash \neg F}$	($\wedge$-intro) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F \quad \mathcal{F} \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \wedge F'}$
($\wedge$-elim 1) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F \wedge F'}{\mathcal{F} \vdash F}$	($\wedge$-elim 2) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F \wedge F'}{\mathcal{F} \vdash F'}$
($\vee$-1) : $\dfrac{\mathcal{F}, G \vdash F \quad \mathcal{F}, \neg G \vdash F'}{\mathcal{F} \vdash F \vee F'}$	($\vee$-2) : $\dfrac{\mathcal{F}, F \vdash G \quad \mathcal{F}, F' \vdash G}{\mathcal{F}, F \vee F' \vdash G}$
(Instance) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash \forall x F}{\mathcal{F} \vdash F[x := t]}$	(Généralisation) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash F \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F}}{\mathcal{F} \vdash \forall x F}$
($\exists$-1) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash \exists x F}{\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F}$	($\exists$-2) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F}{\mathcal{F} \vdash \exists x F}$
(prén$\exists$-1) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash \exists x(G \wedge F) \ x \text{ non libre dans } G}{\mathcal{F} \vdash G \wedge \exists x F}$	(prén$\exists$-2) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash G \wedge \exists x F \ x \text{ non libre dans } G}{\mathcal{F} \vdash \exists x(G \wedge F)}$
(prén$\forall$-1) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash \forall x(G \wedge F) \ x \text{ non libre dans } G}{\mathcal{F} \vdash G \wedge \forall x F}$	(prén$\forall$-2) : $\dfrac{\mathcal{F} \vdash G \wedge \forall x F \ x \text{ non libre dans } G}{\mathcal{F} \vdash \forall x(G \wedge F)}$
(gén.-$\exists$) : $\dfrac{F \vdash G \quad x \text{ non libre dans } G}{\exists x F \vdash G}$	

EXERCICE 59 1. Soit Q un prédicat binaire. Donner le nom des règles appliquées à chaque étape de la déduction suivante, avec justification des hypothèses d'application de la règle si nécessaire.

0)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall y\, Q(x,y)$	hypothèse
1)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash Q(x,y)$	( )
2)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall x\, \neg Q(x,y)$	( )
3)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \neg Q(x,y)$	( )
4)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \neg\forall x\, \neg Q(x,y)$	( )
5)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \exists x\, Q(x,y)$	( )
6)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	( )
7)	$\exists x\, \forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	( )

2. Enoncez (sans utiliser de séquent) le théorème démontré à la question 1. Enoncez la réciproque de ce théorème. Donnez-en une preuve si elle est vraie et un contre-exemple prouvant qu'elle est fausse sinon. $\diamondsuit$

EXERCICE 60 Soit $\phi = \forall x \exists y \big(p(x) \wedge q(y)\big)$ et $\psi = \exists y \forall x \big(p(x) \wedge q(y)\big)$. On déduit ψ à partir de ϕ. Laquelle des déductions suivantes est correcte ? Vous justifierez votre réponse en donnant le nom des règles appliquées à chaque étape de la déduction correcte, avec justification des hypothèses d'application de la règle si nécessaire, et en donnant un contrexemple pour l'étape fausse de la déduction fausse : votre contrexemple sera un modèle de la ligne précédant la ligne fausse, et ne sera pas un modèle de la ligne fausse.

1)	$\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	(instantiation)
	$\phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \exists y\Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )

2)	$\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	(instantiation)
	$\phi \vdash \neg\forall y \neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \neg\forall y \neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )

$\diamondsuit$

EXERCICE 61 1. Montrer que si le séquent $F_1 \vdash F_2$ est prouvable, alors on peut utiliser la règle :

$$(R) : \frac{\mathcal{F} \vdash F_1}{\mathcal{F} \vdash F_2}$$

pour prouver des séquents.

2. Prouver le séquent $F \vee F' \vdash \neg F \supset F'$. Peut-on en déduire que l'on peut utiliser la règle :

$$(\vee \supset \text{-ex1}) : \frac{\mathcal{F} \vdash F \vee F'}{\mathcal{F} \vdash \neg F \supset F'}$$

pour prouver des séquents ?

3. Montrer que si l'on dispose d'une preuve des 3 séquents $\mathcal{F} \vdash A \vee B$, $\mathcal{F}, A \vdash C$ et $\mathcal{F}, B \vdash C$, alors le séquent $\mathcal{F} \vdash C$ est prouvable. Peut-on en déduire que l'on peut utiliser la règle :

$$(\vee\text{-ex1}) : \frac{\mathcal{F} \vdash A \vee B \quad \mathcal{F}, A \vdash C \quad \mathcal{F}, B \vdash C}{\mathcal{F} \vdash C}$$

pour prouver des séquents ?

4. Prouver que l'on peut utiliser les règles :

$$(\vee_i^g) : \frac{\mathcal{F} \vdash A}{\mathcal{F} \vdash A \vee B} \qquad (\vee_i^d) : \frac{\mathcal{F} \vdash B}{\mathcal{F} \vdash A \vee B}$$

pour prouver des séquents.

5. En utilisant les nouvelles règles portant sur le connecteur $\vee$ introduites dans les questions précédentes, prouver le séquent $\vdash (\forall x A \vee \forall x B) \supset \forall x(A \vee B)$. $\diamondsuit$

EXERCICE 62 1. Prouver que l'on peut utiliser la règle :

$$(\exists_e) : \frac{\mathcal{F} \vdash \exists x A \quad \mathcal{F}, A \vdash C \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F} \text{ et } C}{\mathcal{F} \vdash C}$$

pour prouver des séquents.

2. Prouver que l'on peut utiliser la règle :

$$(\exists_i) : \frac{\mathcal{F} \vdash A[x := t]}{\mathcal{F} \vdash \exists x A}$$

pour prouver des séquents.

3. En utilisant ces nouvelles règles, prouver le séquent $\vdash \exists x(A \wedge B) \supset (\exists x A \wedge \exists x B)$.

4. La preuve suivante du séquent $\vdash \exists x A \supset \forall x A$ est-elle correcte ?

(1)	$\exists x A \vdash \exists x A$	(Hypothèse)
(2)	$\exists x A, A \vdash A$	(Hypothèse)
(3)	$\exists x A \vdash A$	($\exists_e$ (1) et (2))
(4)	$\exists x A \vdash \forall x A$	(Généralisation (3))
(5)	$\vdash \exists x A \supset \forall x A$	(Synthèse (4))

Pouvez-vous trouver une structure dans laquelle la formule $\exists x A \supset \forall x A$ est fausse ? ♢

Exercice 63 1. Une règle permettant d'exprimer le tiers-exclus peut s'écrire :

$$(\mathrm{TE}) : \frac{\mathcal{F}, A \vdash B \quad \mathcal{F}, \neg A \vdash B}{\mathcal{F} \vdash B}$$

Montrer que l'on peut utiliser cette règle pour prouver des séquents.

2. Montrer que l'on peut utiliser la règle :

$$(\forall_m) : \frac{\mathcal{F}, \exists x \neg A \vdash C \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F}}{\mathcal{F}, \neg \forall x A \vdash C}$$

pour prouver des séquents.

3. En déduire une preuve du séquent $\vdash \forall x A \vee \exists x \neg A$. On pourra utiliser la règle $(\vee_i^d)$. ♢

Exercice 64 1. Prouver que l'on peut utiliser la règle :

$$(\exists_i^g) : \frac{\mathcal{F}, F \vdash G \quad x \text{ non libre dans } \mathcal{F} \text{ et } G}{\mathcal{F}, \exists x F \vdash G}$$

pour prouver des séquents. On pourra utiliser la règle $(\exists_e)$.

2. Utiliser cette nouvelle règle pour prouver le séquent $\vdash \exists x \forall y F \supset \forall y \exists x F$.

3. A-t-on la réciproque ? En d'autres termes, peut-on prouver le séquent $\vdash \forall y \exists x F \supset \exists x \forall y F$? Si oui, donner une preuve, si non donner une structure dans laquelle ce séquent est faux. ♢

Système de Hilbert-Ackermann

Dans les exercices qui suivent, les seuls axiomes et règles utilisables sont ceux du système de Hilbert-Ackermann vu en cours, et rappelés ci-dessous :

Schémas d'axiomes

($\vee$-elim)	$A \vee A \supset A$
($\vee$-intro)	$A \supset (A \vee B)$
($\vee$-com)	$(A \vee B) \supset (B \vee A)$
(pre-trans)	$(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$
(instance)	$\forall x A \supset A[x := t] \quad (var(t) \text{ libres dans } A)$
(exist)	$A[x := t] \supset \exists x A$

Règles

$$(\mathrm{MP}) : \frac{A \quad A \supset B}{B} \qquad (\forall_i) : \frac{A \supset B \ x \text{ non libre dans } A}{A \supset \forall x B} \qquad (\exists_i) : \frac{A \supset B \ x \text{ non libre dans } A}{\exists x A \supset B}$$

Exercice 65 1. Les deux formules suivantes sont-elles des instances de l'axiome (instance) ?

$$\forall x p(x) \supset p(x) \qquad \forall x \exists y R(x, y) \supset \exists y R(y, y)$$

Si ce n'est pas le cas, pouvez-vous trouver une structure dans laquelle la formule est clairement fausse ? $\diamondsuit$

Exercice 66 En utilisant la transitivité de $\supset$ (i.e. si $A \supset B$ et $B \supset C$ sont des théorèmes, alors $A \supset C$ est un théorème), montrer que, si $\forall y p(y)$ est un théorème, alors $\exists y p(y)$ est aussi un théorème. $\diamondsuit$

Exercice 67 En utilisant la transitivité de $\supset$, prouver que :

$$(p(a) \supset \forall x q(x)) \supset (\exists x p(x) \supset q(a))$$

est un théorème. $\diamondsuit$

Exercice 68 On prend les notations du logiciel Tarski's World.

1. Ecrire des formules logiques F_1 , F_2 et F_3 traduisant que
   (i) *Deux objets non comparables dans la relation "à droite de" sont égaux*
   (ii) *Deux cubes quelconques ne sont jamais comparables dans la relation "à droite de"*
   (iii) *Deux cubes quelconques sont égaux*
2. Montrer que $\{F_1, F_2\} \vdash F_3$
   1. Par résolution
   2. Par arbres sémantiques
   3. Par le système de Hilbert-Ackermann $\diamondsuit$

Exercice 69 1. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant les règles du calcul des séquents.

2. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant la résolution. $\diamondsuit$

Exercice 70 On considère le programme formé des trois clauses suivantes :

C_1 : $\forall x \forall y \big(R(f(x), y) \longleftarrow P(x, y)\big)$

C_2 : $\forall x \forall y \big(P(f(x), y) \longleftarrow R(x, y)\big)$

C_3 : $R(a, b) \longleftarrow$

Montrer par résolution que $\{C_1, C_2, C_3\} \vdash R(f(f(a)), b)$ et que $\{C_1, C_2, C_3\} \vdash P(f(a), b)$. $\diamondsuit$

Exercice 71 Soit le langage L contenant le symbole de relation unaire q, les symboles de relation binaire p, r, s, et les symboles de constante $1, 2, 3$. Soit P le programme suivant :

$$\begin{aligned}
p(x, y) &\longleftarrow s(x, y) \\
p(x, y) &\longleftarrow p(y, x) \\
q(x) &\longleftarrow p(x, y) \\
q(x) &\longleftarrow r(y, x) \\
r(x, y) &\longleftarrow r(y, x) \\
r(x, y) &\longleftarrow q(x), q(y) \\
s(1, 2) &\longleftarrow \\
s(2, 3) &\longleftarrow
\end{aligned}$$

1. Calculer le plus petit modèle de Herbrand de P.

2. Prouver par SLD résolution que $P \vdash r(1,2)$ et $P \vdash r(1,1)$. $\diamondsuit$

Exercice 72 Soit un langage où a est un symbole de constante, f un symbole de fonction unaire, P et Q deux symboles de prédicat unaire et R et S deux symboles de relation binaire montrer, par la méthode de résolution, que les ensembles suivants ne sont pas satisfaisables .

1. $\{\neg P(x) \vee P(f(x)), P(f(a)), \neg P(f(f(a)))\}$.
2. $\{\neg P(x) \vee Q(x), P(f(y)), \neg Q(f(y))\}$.
3. $\{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee S(x,z), R(f(x'),x'), \neg S(y',a)\}$. $\diamondsuit$

Exercice 73 Montrer, par la méthode de résolution, que les formules suivantes sont valides (Indication : montrer que leur négations G sont insatisfaisables ; on commencera par mettre les formules G sous forme prénexe, puis on skolémisera, et enfin on mettra sous forme clausale avant d'appliquer la réfutation).

1. $\exists x \forall y \exists z ((P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x)) \vee (\neg P(y) \wedge \neg P(z)) \vee (\neg Q(y) \wedge \neg Q(z)))$.
2. $\exists x \forall y \exists z (R(x,y) \vee \neg R(y,y) \vee (\neg R(y,z) \wedge y \neq z))$.

Remarque : lorsque l'on affirme une équation, on peut l'utiliser pour réécrire une des formules atomiques déjà énumérées.

3. $\exists x \forall y \exists z \exists w (\neg R(x,y) \vee (R(y,z) \wedge R(z,w) \wedge y \neq w) \vee (R(y,z) \wedge R(z,y)))$. $\diamondsuit$

Exercice 74 Soient

F_1 : $\forall x \forall y ((A(x) \wedge B(y)) \supset \exists x \exists y (U(x) \vee V(y)))$

F_2 : $\forall x \forall y (U(x) \supset (A(y) \supset R(x,y)))$.

F_3 : $\forall x \forall y \forall z ((B(x) \wedge V(y)) \supset S(x,y,z))$.

F_4 : $(\forall x \neg C(x)) \supset \forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \wedge \neg S(x,y,z))$.

G : $\exists x \exists y (A(x) \supset (B(y) \supset \exists x C(x)))$.

Montrer, par la méthode de résolution, que $F_1, F_2, F_3, F_4 \vdash G$. $\diamondsuit$

Exercice 75 Soit : *Rien de ce qu'on rencontre en mer et qu'on ne remarque pas est une sirène. Ce qu'on rencontre en mer et qu'on inscrit sur le livre de bord est toujours remarquable. Pour ma part, je n'ai jamais rien rencontré de remarquable lors de mes voyages en mer. On inscrit toujours sur le livre de bord ce que l'on a rencontré de remarquable en mer*

1. Analysez et formalisez cette citation.
2. Montrez que l'on en déduit que je n'ai jamais rencontré de sirène. $\diamondsuit$

Exercice 76 1. Ecrire (dans le langage de Tarski et en utilisant les prédicats $Cube$ et $LeftOf$ de Tarski) des formules logiques F_1 , F_2 et F_3 traduisant que

(i) *Deux objets non comparables dans la relation "à gauche de" sont égaux*

(ii) *Deux cubes quelconques ne sont jamais comparables dans la relation "à gauche de"*

(iii) *Deux cubes quelconques sont égaux*

2. Justifier les règles employées dans la déduction suivante par calcul des séquents, où l'on suppose que les séquents $\mathcal{F} \vdash F \supset G$ et $\mathcal{F} \vdash G \supset H$ sont prouvés (donner le nom de la règle utilisée à chaque étape).

1.	$\mathcal{F} \vdash \big(F \supset G\big)$	(séquent prouvé)
2.	$\mathcal{F} \vdash \big(G \supset H\big)$	(séquent prouvé)
3.	$\mathcal{F}, F \vdash \big(F \supset G\big)$	( )
4.	$\mathcal{F}, F \vdash \big(G \supset H\big)$	( )
5.	$\mathcal{F}, F \vdash F$	( )
6.	$\mathcal{F}, F \vdash G$	( )
7.	$\mathcal{F}, F \vdash H$	( )
8.	$\mathcal{F} \vdash \big(F \supset H\big)$	( )

3. Montrer que $\{F_1, F_2\} \vdash F_3$

1) Par résolution (Indication : la forme clausale de $\neg F_3$ est $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg\ (a = b)$)

2) Par le calcul des séquents. ♢

Exercice 77 Considérons l'énoncé suivant, tiré de la "Logique sans peine" de Lewis CAROLL.

- Les animaux sont toujours mortellement offensés si je ne fais pas attention à eux.
- Les seuls animaux qui m'appartiennent se trouvent dans ce pré.
- Aucun animal ne peut résoudre une devinette s'il n'a pas reçu une formation convenable dans une école.
- Quand un animal est mortellement offensé, il se met toujours à courir en tous sens et à hurler.
- Je ne fais jamais attention à un animal qui ne m'appartient pas.
- Aucun animal qui a reçu dans une école une formation convenable ne se met jamais à courir en tous sens et à hurler.
- Aucun des animaux qui se trouvent dans ce pré n'est un raton laveur.

1. Formaliser ces déclarations à l'aide de clauses utilisant les propositions atomiques suivantes :

at : je fais attention à l'animal considéré
mo : l'animal considéré est mortellement offensé
pr : l'animal considéré est dans le pré
ap : l'animal considéré m'appartient
fc : l'animal considéré a reçu une formation convenable
rd : l'animal considéré peut résoudre une devinette
ch : l'animal considéré se met à courir en tous sens et à hurler
rl : l'animal considéré est un raton laveur

2. Utilisant la méthode de résolution déduire des formules précédentes que les ratons laveurs ne peuvent résoudre de devinettes. ♢

Exercice 78 Trois individus accusés d'un crime font les témoignages suivants :

- Damien : "Laure est coupable et Marie est innocente"
- Laure : "Si Damien est coupable alors Marie l'est aussi"
- Marie : "Je suis innocente mais au moins l'un des deux autres est coupable"

1. Représenter les témoignages par un ensemble de clauses en logique des propositions.

2. Montrer par la méthode de résolution que si tous disent vrai alors Laure est la seule coupable.

3. Montrer par la méthode de résolution que si les innocents disent vrai et seulement eux, alors Damien et Marie sont coupables et Laure est innocente. ♢

Exercice 79 Considérons l'énoncé suivant : *"Si l'assemblée ne prend pas de nouvelles dispositions, la grève ne se terminera pas, à moins qu'elle dure depuis plus d'une année et que le président soit démis de ses fonctions. Sachant que l'assemblée refuse d'agir, la grève qui vient de commencer (c'est-à-dire qui dure depuis moins d'un an) se terminera t-elle ?"*

1. Formaliser les informations données dans le système formel d'Hilbert en faisant appel uniquement aux propositions suivantes :

p : l'assemblée ne prend pas de nouvelles dispositions

l : la grève se terminera

a : la grève dure depuis plus d'une année

d : le président est démis de ses fonctions

2. Montrer par la méthode de résolution que la grève ne se terminera pas. ♢

Exercice 80 Pour justifier la composition de son équipe de Football, l'entraîneur tient le raisonnement suivant : *"Pour que l'attaque soit dangereuse, il suffit qu'Eric et Henri jouent le match. Si Clément et Olivier jouent le match, alors le milieu sera fort et la défense sera solide. En fait, nous perdrons le match seulement si le milieu est faible ou l'attaque inoffensive. Comme Eric, Henri, Clément et Olivier vont jouer le match, l'équipe va l'emporter ou au pire faire match nul."*

1. Modéliser ce raisonnement en logique des propositions. On prendra soin d'utiliser les notations suivantes :

e : Eric joue le match

h : Henri joue le match

c : Clément joue le match

o : Olivier joue le match

a : L'attaque sera dangereuse

m : Le milieu sera fort

d : La défense sera solide

p : L'équipe va perdre

2. Montrer par la méthode de résolution la validité du raisonnement mené par l'entraîneur. ♢

Exercice 81 On considère le programme formé des deux clauses suivantes :

$C_1 : \quad \forall x \forall y \big(R(f(x), y) \longleftarrow P(x, y)\big) \quad , \quad C_2 : \quad \forall x \forall y \big(P(f(x), y) \longleftarrow R(x, y)\big)$

Montrer par résolution que $\{C_1, C_2\} \vdash \forall x \forall y \big(R(f(f(x)), y) \longleftarrow R(x, y)\big)$ et que

$\{C_1, C_2\} \vdash \forall x \forall y \big(P(f(f(x)), y) \longleftarrow P(x, y)\big)$. ♢

Exercice 82 Montrer par résolution que :

1. $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$.

2. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$.

3. $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall z R(z,z)$ $\diamondsuit$

Dans la suite on omettra les quantificateurs universels dans les clauses.

Exercice 83 Montrer par résolution qu'une relation binaire irréflexive et transitive est asymétrique ; il faut montrer que $\{C_1, C_2\} \vdash C_3$ où

$C_1 :$ $\neg R(x,x)$,

$C_2 :$ $R(x,z) \longleftarrow R(x,y), R(y,z)$ et

$C_3 :$ $\neg(R(x,y) \wedge R(y,x))$. $\diamondsuit$

Exercice 84 On considère le programme formé des trois clauses suivantes :

$C_1 :$ $R(a,b)$

$C_2 :$ $Q(x,x)$,

$C_3 :$ $Q(x,z) \longleftarrow R(x,y), Q(y,z)$.

Calculer les réponses à la requête $\longleftarrow Q(x,b)$ obtenues par résolution (on construira 2 réfutations linéaires). $\diamondsuit$

Exercice 85 On considère un langage comportant les constantes c, d, les prédicats unaires E, I, S et le prédicat binaire R. Construire une réfutation linéaire de l'ensemble de clauses :

$C_1 :$ $E(c)$,

$C_2 :$ $I(d)$,

$C_3 :$ $S(d)$,

$C_4 :$ $\neg I(y) \vee R(c,y)$,

$C_5 :$ $\neg E(x) \vee \neg S(y) \vee \neg R(x,y)$. $\diamondsuit$

Exercice 86 On considère le programme formé des quatre clauses suivantes :

$C_1 :$ $R(a,b)$,

$C_2 :$ $R(c,b)$,

$C_3 :$ $R(x,z) \longleftarrow R(x,y), R(y,z)$,

$C_4 :$ $R(x,y) \longleftarrow R(y,x)$.

1. Calculer les réponses à la requête $\longleftarrow R(x,c)$ obtenues par résolution.

2. Que donne la stratégie PROLOG pour la même requête ? $\diamondsuit$

1. $\neg p \vee q \vee s$

$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg s)$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge s) \vee (\neg p \wedge s)$

2.

1. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee p)$
2. $\neg p \vee \neg q \vee r$
3. $q \vee \neg p \vee \neg s \vee r$

3. 1 oui ; 2 non ; 3 oui ; 4 oui ; 5 non.

4. 1) Les égalités se déduisent immédiatement de la table de vérité ci-dessous

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \supset \neg q$	$\neg p \supset q$	$\neg(p \supset \neg q)$
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0

2) Par récurrence sur n.

Pour la dernière égalité, il est utile de montrer au préalable

$$\begin{aligned}\overline{I(F_n \wedge (F_{n-1} \wedge (\cdots \wedge (F_2 \wedge F_1))\cdots))} &= \overline{I(F_n)I(F_{n-1})\cdots I(F_2)I(F_1)} \\ &= \overline{I(F_n)} + \overline{I(F_{n-1})} + \cdots + \overline{I(F_1)}\end{aligned}$$

5. Si F est insatisfaisable, alors pour toute I, $I(F) = 0$, et donc pour toute I, $I(\neg F) = \overline{I(F)} = 1$, donc $\neg F$ est valide. La réciproque se prouve de même.

6.

7. les souris heureuses (XOR)

8. fripon

9. $\neg x = x \; NAND \; x \quad x \vee y = (x \; NAND \; x) \; NAND \; (y \; NAND \; y)$ et cela suffit à tout exprimer. $xy = \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(x \; NAND \; y) = (x \; NAND \; y) \; NAND \; (x \; NAND \; y)$.

10. 1) $p \Longrightarrow q$ et l'implication contraposée $\neg q \Longrightarrow \neg p$ sont vraies. La réciproque $q \Longrightarrow p$, ainsi que sa contraposée $\neg p \Longrightarrow \neg q$ sont en général fausses.

2) $p \Longrightarrow q$ est évidemment fausse, par contre la réciproque est vraie. Cet exemple montre aussi qu'on ne peut pas permuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ (cf. aussi exercice 1.12).

11. Il a confondu $p \supset q$ avec $\neg p \supset \neg q$ (qui est la contraposée de la réciproque $q \supset p$ de $p \supset q$).

12. 1) On veut montrer $\neg p \supset q \vee r$, la contraposée est $\neg q \wedge \neg r \supset p$. $\neg q$ implique x pair, donc $x = 2a$, $\neg r$ implique $x \neq 2b$. b impair, donc a pair et $a = 2c$ et donc $x = 4c$.

2) $\neg p \supset q \vee r$ peut se mettre sous la forme $p \vee q \vee r$. Puis on considère les 4 cas, reste de la division par 4 de x est 0,1,2, ou 3. Si 0, p est vraie, si 1 ou 3, q est vraie, et si 2, r est vraie.

13. Posons $A =$ "j'aime Anne", $M =$ "j'aime Marie", $P = M \supset A =$ "si j'aime Marie, alors j'aime Anne" . Dans le 1) nous avons $(M \vee A) \wedge (M \supset A) = (M \vee A) \wedge (\neg M \vee A) = A$; on peut donc conclure avec certitude qu'il aime Anne, mais ses sentiments à l'égard de Marie ne sont plus du ressort de la logique (il peut aimer, ou ne pas aimer Marie, aucune de ces deux assertions ne résulte de (a) et (b)).

Par contre, dans le 2), nous savons avec certitude que notre logicien aime Anne **et** Marie. En effet, nous avons les deux assertions : (a) : $P \supset M$, et (b) : $M \supset P$. Supposons P fausse, alors, comme "le faux implique n'importe quoi", il résulte de (a) que M est vraie, mais alors, P est aussi vraie par (b), et donc aussi A ; si P est vraie, alors il résulte aussi de (a) que M est vraie, et donc aussi A puisque P est vraie. Notre logicien a donc de bonnes chances de finir bigame (à moins que l'élue de son coeur ne s'appelle Anne-Marie).

14. 1) car F est vraie pour toute valuation des p_i. 2) si $F \equiv G$, alors $\neg F \equiv \neg G$. Les négations s'obtiennent en permutant les $\wedge$ et $\vee$ et remplaçant chaque p_i par $\overline{p_i}$. reste à appliquer le 1) pour remettre les p_i en place.

15. 2^{2^n}. remarquer la bijection qui à la formule F associe la fonction $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ donnée par $f(v_1, \ldots, v_n)$ est la valeur de vérité de F pour la valuation $v_1, \ldots, v_n$ de $p_1, \ldots, p_n$.

16. 1) $G \vdash F$ et $H \vdash F$. 2) non car $F \vee H \equiv F$ et $F \vee \neg H \equiv F + \bar{r}(\bar{p}+q) = p+q+r+\bar{r}\bar{p}+\bar{r}q$.

17. 1) oui oui, non non. Remarquer que F dit que exactement 2 parmi 3 sont vrais.

2) $\neg F$ dit donc "pas 2 parmi 3" :FND de $\neg F$ $pqr + \bar{p}\,\bar{q}r + \bar{q}\,\bar{r}p + \bar{r}\,\bar{p}q + \bar{q}\,\bar{r}\,\bar{p}$. On obtient la forme conjonctive (ou clausale) de F en permutant les $+$ et . et changeant les variables en leur version barrée dans la forme disjonctive de $\neg F$, et idem pour $\neg F$. Par exemple $\neg F = (\bar{p} + \bar{q} + r)(\bar{q} + \bar{r} + p)(\bar{r} + \bar{p} + q)$.

3) $G = F$. 4) $F_1 = \bar{p}q\bar{r} + \bar{p}\,\bar{q}r + pqr$. Non ($p, q$ vrais et r faux) et non(p, q, r vrais).

18. Si $I(F) = vrai$ pour toute $F \in \mathcal{F}$, alors à cause de $\mathcal{F} \models \mathcal{F}'$, on aura $I(F) = vrai$ pour toute $F \in \mathcal{F}'$, et donc à cause de $\mathcal{F}' \models \mathcal{F}''$, aussi $I(F) = vrai$ pour toute $F \in \mathcal{F}''$, d'où $\mathcal{F} \models \mathcal{F}''$.

19. 1) Le séquent $(\emptyset, G)$ est vrai dans I si et seulement si

$$(\text{pour toute } F \in \emptyset, I(F) = 1) \implies I(G) = 1 \qquad (I)$$

or l'assertion : "pour toute $F \in \emptyset$, $I(F) = 1$" est trivialement vraie, puisqu'on peut la récrire : $\big(F \in \emptyset \implies I(F) = 1\big)$; $F \in \emptyset$ est toujours faux puisque l'ensemble $\emptyset$ est toujours vide, mais alors, comme "le faux implique n'importe quoi", l'implication $F \in \emptyset \implies I(F) = 1$, qui s'écrit aussi $0 \implies I(F) = 1$, est toujours vraie, et donc $\big(\text{pour toute } F \in \emptyset, I(F) = 1\big)$ est vraie. L'implication (I) se réduit donc à $1 \implies I(G) = 1$, qui est vraie si et seulement si $I(G) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si G est vraie dans I. La validité se vérifie de même.

Ces raisonnements concernant l'ensemble vide et la satisfaction des implications $0 \implies G$ ou $1 \implies G$ sont délicats, mais hélas fréquemment utiles, et doivent être maniés avec soin pour éviter les erreurs.

2) Le séquent $(\emptyset, (p \supset q))$ est vrai dans I si et seulement si $p \supset q$ est vrai dans I, c'est-à-dire si et seulement si $I(p) = 0$ ou $I(q) = 1$.

Le séquent $(\{p, (p \supset q)\}, q)$ est valide, puisque $I(p) = 1$, et $I(p \supset q) = \overline{I(p)} + I(q) = 1$ entraînent que $I(q) = 1$.

20. On suppose $S = (\mathcal{F}, G) = (\{F_n, \ldots, F_1\}, F)$; alors $\phi(S) = F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset F) \ldots))$ et le résultat se démontre exactement comme la proposition 1.8 (théorème de la déduction, par induction sur n) ou bien a partir de l'. exercice 1.2.

On peut aussi faire une preuve directe par induction sur n :

Base : c'est l'exercice 1.4 1) ;

Induction :

- supposons $S = (\mathcal{F}, G)$ est vrai dans I ssi $\phi(S)$ est vraie dans I, et soit $S' = (\mathcal{F} \cup \{F_{n+1}\}, G)$; si S' vrai ds I alors
  1. soit F_{n+1} est faux ds I et alors $\phi((\mathcal{F} \cup \{F_{n+1}\}, G))$ est vraie dans I, ou bien
  2. soit F_{n+1} est vrai ds I et si de plus $F_n, ..., F1$ sont vrais ds I, alors G vrai ds I, mais alors S est aussi vrai ds I et donc $\phi(S)$ est vraie dans I, et aussi $\phi(S') = F_{n+1} \supset \phi(S)$.
- inversement si $\phi(S') = F_{n+1} \supset \phi(S)$ est vrai ds I,
  1. soit F_{n+1} est faux ds I, et alors S' est vrai ds I,
  2. soit F_{n+1} est vrai ds I, et donc $\phi(S)$ est vraie dans I, mais par induction, S est vrai dans I et donc si de plus tous les $F_n, ..., F1$ sont vrais ds I, alors G vrai ds I : ca implique que S' est vrai dans I.

21. Voir Exemple 5.12, page 74 du livre. 1) montre que p implique p est une tautologie, 2) montre que "p implique que "q implique p" " (un des axiomes du système de Hilbert) est une tautologie, 3) établit la contraposée, 4) montre que si p est vrai, alors $\neg p$ implique n'importe quoi, enfin 5) montre que $p \supset (p \supset p)$ est une tautologie.

22.

1) $\mathcal{F}, F \vdash G$
$\mathcal{F} \vdash (F \supset G)$ (synthèse)
$\mathcal{F}, \neg\neg F \vdash (F \supset G)$ (augmentation)
$\mathcal{F}, \neg\neg F \vdash F$ (hypothèse + double négation)
$\mathcal{F}, \neg\neg F \vdash G$ (modus ponens)

2) $\mathcal{F}, \neg\neg F \vdash G$
$\mathcal{F} \vdash (\neg\neg F \supset G)$ (synthèse)
$\mathcal{F}, F \vdash (\neg\neg F \supset G)$ (augmentation)
$\mathcal{F}, F \vdash \neg\neg F$ (hypothèse + double négation)
$\mathcal{F}, F \vdash G$ (modus ponens) $\square$

23. Nous montrons que si $\mathcal{F}, F \vdash G$, alors $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$.

1. $\mathcal{F}, F \vdash G$
2. $\mathcal{F}, F, \neg G \vdash G$ (augmentation)
3. $\mathcal{F}, F, \neg G \vdash \neg G$ (hypothèse)
4. $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$ (contradiction)

Réciproquement, une preuve similaire montre que si $\mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F$ alors $\mathcal{F}, F \vdash G$.

24.

Montrons que $p \supset p$ est un théorème de Hilbert-Ackermann. On montre d'abord

Lemme(1) Si $p \supset q$ et $q \supset r$ sont des théorèmes, alors $p \supset r$ est un théorème (règle (v) du cours. En effet, on a la suite de théorèmes

$(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$ (ddd+règle (ii))
$(q \supset r) \supset ((\bar{p} \vee q) \supset (\bar{p} \vee r))$ (règle (ii))
$(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ (abréviation)
$(p \supset q) \supset (p \supset r)$ (modus ponens avec $(q \supset r)$)
$(p \supset r)$ (modus ponens avec $(p \supset q)$)

On a ensuite

$p \supset p \vee p$ (introduction du ou +règle (ii))
$p \vee p \supset p$ (élimination du ou)
$p \supset p$ (Lemme(1))

Rappelons que par le calcul des séquents, cette preuve se réduit à :

$p \vdash p$ (utilisation d'une hypothèse)
$\emptyset \vdash (p \supset p)$ (synthèse)

L' élimination du ou est un axiome de Hilbert-Ackermann. La preuve à l'aide du calcul des séquents procède comme suit :

$p \vdash p$	(utilisation d'une hypothèse)
$p \vdash p$	(utilisation d'une hypothèse)
$p \vee p \vdash p$	(règle $\mathcal{F}, F \vdash G$ et $\mathcal{F}, F' \vdash G$ alors $\mathcal{F}, (F \vee F') \vdash G$)
$\emptyset \vdash ((p \vee p) \supset p))$	(synthèse)

25. 1) est la preuve par séquents, 2) donne la suite des théorèmes de la preuve par Hilbert.

1)

1.	$(p \supset q), \neg q, p \vdash \neg q$	(hypothèse)
2.	$(p \supset q), \neg q, p \vdash p$	(hypothèse)
3.	$(p \supset q), \neg q, p \vdash p \supset q$	(hypothèse)
4.	$(p \supset q), \neg q, p \vdash q$	(modus ponens sur 2 et 3)
5.	$(p \supset q), \neg q \vdash \neg p$	(contradiction en 1 et 4)
6.	$(p \supset q) \vdash (\neg q \supset \neg p)$	(synthèse)

2)

1.	$p \supset p$	(cf. cours)
2.	$\bar{p} \vee p$	(abréviation)
3.	$p \vee \bar{p}$	(règle (iii))
4.	$\bar{q} \vee \bar{\bar{q}}$	(substituer $\bar{q}$ à p)
5.	$q \supset \bar{\bar{q}}$	(abréviation)
6.	$(\bar{p} \vee q) \supset (\bar{p} \vee \bar{\bar{q}})$	(règle (iv))
7.	$(f \vee g) \supset (g \vee f)$	(commutativité du $\vee$)
8.	$(\bar{p} \vee \bar{\bar{q}}) \supset (\bar{\bar{q}} \vee \bar{p})$	(substitution)
9.	$(\bar{p} \vee q) \supset (\bar{\bar{q}} \vee \bar{p})$	(règle (v))
10.	$(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p})$	(règle (v))

26.

1.	$p \supset p$	(cf. cours)
2.	$\bar{p} \vee p$	(abréviation)
3.	$p \vee \bar{p}$	(règle (iii))
4.	$\bar{p} \vee \bar{\bar{p}}$	(substituer $\bar{p}$ à p)
5.	$p \supset \bar{\bar{p}}$	(abréviation)

Dans le théorème précédent, en substituant $\bar{p}$ à p on trouve $\bar{p} \supset \bar{\bar{\bar{p}}}$, par la règle (v) on en déduit $p \vee \bar{p} \supset p \vee \bar{\bar{\bar{p}}}$, comme $p \vee \bar{p}$ est un théorème (cf. ligne 3.) on déduit par modus ponens $p \vee \bar{\bar{\bar{p}}}$, puis par la règle (ii) $\bar{\bar{\bar{p}}} \vee p$, qui est une abréviation de $\neg\neg p \supset p$.

Par les séquents, c'est la règle de double négation : $p \vdash p$ par hypothèse, et puis par double négation, $p \vdash \bar{\bar{p}}$, et par synthèse, $\vdash p \supset \bar{\bar{p}}$. Idem, $\bar{\bar{p}} \vdash \bar{\bar{p}}$, par hypothèse, et puis par double négation $\bar{\bar{p}} \vdash p$, et synthèse.

27. 1. Notation préfixe $\neg \supset \Big(\wedge (\forall x P(x)) Q(x) \Big) \vee \Big(R(x) \neg P(x) \Big)$

2. Soit $pref$ cette fonction :

$pref(A) = A$ si A est une formule atomique, et sinon

$pref(\neg F) = \neg pref(F)$

$pref(QxF) = Qxpref(F)$, pour $Q \in \{\exists, \forall\}$

$pref(F * G) = *pref(F)pref(G)$, pour $* \in \{\vee, \wedge, \supset\}$

28.

$C_1 = (\neg p \vee q \vee r)$, $C_2 = \neg p \vee \neg q$, $C_3 = (\neg p \vee r)$, $C_4 = p$, $C_5 = r$.

29. forme clausale de $\neg F = \neg(\neg q \vee t)$ est $\{q, \neg t\}$. Forme clausale de S est $\{p, \neg s, (\neg p \vee \neg q \vee r), (\neg p \vee \neg q \vee s)\}$. Réfutation : $C_1 = (\neg p \vee \neg q \vee s)$, $C_2 = p$, $C_3 = (\neg q \vee s)$, $C_4 = \neg s$, $C_5 = \neg q$, $C_6 = q$, $C_7 = \Box$.

30.

1) $p \vee \neg q \vee \neg r$, r , $p \vee \neg q$, q , p donne la preuve de p ; on continue $s \vee \neg q \vee \neg p$, p , $s \vee \neg q$, q , s. Donc $p \wedge s$ est conséquence de S.

2) oui, la même.

3) non, car sinon, t serait conséquence de S' donc on pourrait réfuter $S' \cup \neg t$, mais comme t n'apparait que négativement il n'y a pas moyen de le faire disparaitre.

4) non, si tout est vrai, on a un modèle de S' qui n'est pas modèle de $p \wedge \neg t$.

31. 1) les règles $\supset abc, \supset acd,\ ab \supset$ nous conduisent à essayer a, c, d vrais et b faux, d'où e faux par $e \supset b$. puis on vérifie les règles une par une, on est amené à poser f vrai et c'est un modèle.

2) On remarque que $bce \supset$ est inutile (car impliqué par $ce \supset$. On fait la suite de coupures :

$hi \supset$ avec $\supset i$ donne $h \supset$

$h \supset$ avec $j \supset h$ donne $j \supset$

$j \supset$ avec $\supset ej$ donne $\supset e$

$\supset e$ avec $ce \supset$ donne $c \supset$

$c \supset$ avec $i \supset ch$ donne $i \supset h$

$h \supset$ avec $i \supset h$ donne $i \supset$

$i \supset$ avec $\supset i$ donne $\Box$ la clause vide, donc insatisfaisabilité.

32. On remarque que $p \Longrightarrow q$ est équivalent à $\neg q \Longrightarrow \neg p$. Donc, $[\neg q$ et $(\neg q \Longrightarrow \neg p)] \Longrightarrow \neg p$ est équivalent à la règle de modus tollens. D'autre part, en remplaçant p par $\neg q$ et q par $\neg p$ dans la règle de modus ponens, on obtient $[\neg q$ et $(\neg q \Longrightarrow \neg p)] \Longrightarrow \neg p$ qui se déduit donc de la règle de modus ponens.

La réciproque se montre de façon analogue. On remarque que $p \Longrightarrow q$ est équivalent à $\neg p$ ou q, soit $(\neg p \vee q)$; alors la règle de modus ponens qui s'écrit $[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$ est équivalente à $p \Longrightarrow [(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q]$, soit encore $p \Longrightarrow [\neg(p \Longrightarrow q) \vee q]$, dont la contraposée $[(p \Longrightarrow q) \wedge \neg q] \Longrightarrow \neg p$ est la règle de modus tollens.

33. Définissons les formules $A = a$, $C = c$, $D = (\neg c \vee b)$ et $E = \neg b \vee a)$.

Les arbres binaires et sémantiques et les formes simplifiées sont dans la figure ci-dessous. Pour les arbres sémantiques, l'énumération c, b, a est meilleure.

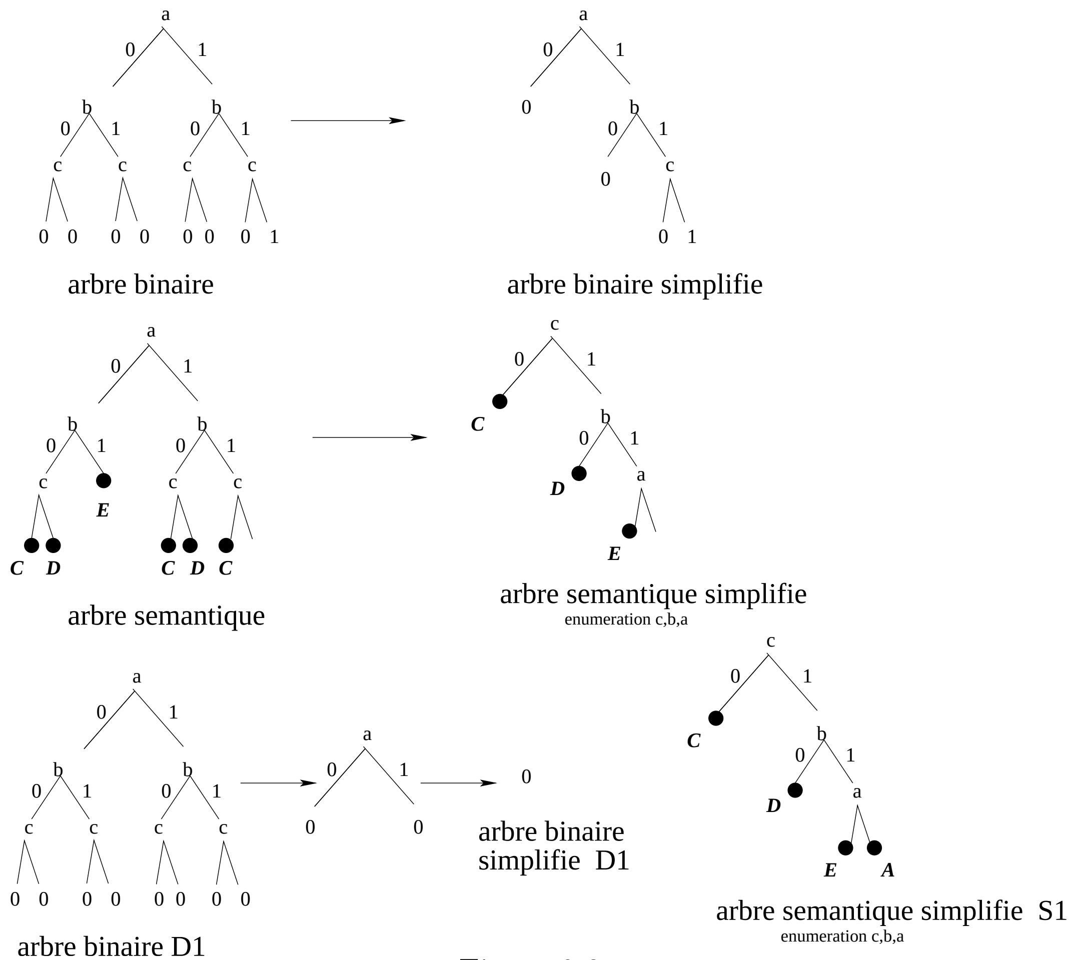

Figure 0.3

35. Aucune des choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il ne remarque pas n'est une sirène.

$$\forall x \ \forall y \ ((renc(y,x) \wedge \neg \ rem(y,x)) \ \supset \ \neg s(x))$$

Les choses qui sont rencontrées en mer et qu'on inscrit sur le livre de bord sont toujours dignes d'intért.

$$\forall x \ \forall y \ ((renc(y,x) \wedge inscr(x)) \ \supset \ interet(x))$$

Personnellement, je n'ai jamais rien rencontré, au cours de mes voyages en mer, qui soit digne d'intért.

$$\forall x \ (renc(moi,x) \ \supset \ \neg \ interet(x))$$

Les choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il remarque sont toujours inscrites sur le livre de bord.

$$\forall x \ \forall y \ ((renc(y,x) \wedge rem(x)) \ \supset \ inscr(x))$$

Que peut-on dire des choses rencontrées en mer ?

réponse : je n'ai jamais rencontré de sirène en mer

$$\forall x\ (renc(moi,\ x) \supset \neg\ s(x))$$

36. Déterminer les variables libres et les variables liées dans les formules suivantes :

- A libres : $\{x, y\}$ liées : $\{z\}$
- B libres : $\{y, z\}$ liées : $\{x, z\}$ (y a une occur. libre et une liée)
- C libres : $\emptyset$ liées : $\{x, y, z\}$ C est une formule close

37. Après renommage adéquat il vient : $A = p(f(y, u)) \vee \forall z\ \exists w\ r(w, z)$

2. $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ $p(f(g(f(x))),\ g(f(x)),\ f(x))$

$\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_3$ $p(f(g(z)),\ g(z),\ f(f(g(z))))$

$\sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2$ $p(f(y),\ g(f(f(y))),\ f(f(y)))$

La composition de substitutions n'est pas commutative

38.

question	filtrage	unification	substitution
1)	oui	oui	
2)	non	oui	$x/f(a)$, $z/f(a)$, $y/g(a, f(a))$
3)	non	non	

deux termes t_1 et t_2 tels que $t_2 = \sigma(t_1)$, mais t_1 et t_2 ne sont pas unifiables : oui par exemple $t_1 = x$ et $t_2 = f(x)$

39. Pour unifier plus de deux termes, il faut procéder de manière itérative. Ici on a trois termes et on procéde ainsi :

– chercher σ l'unificateur le plus général de t_1 et t_2

– si echec a l'étape précédente alors les 3 termes ne sont pas unifiables puisqu'on échoue avec deux d'entre eux. Si succès alors il faut unifier $\sigma(t_1)$ et $\sigma(t_3)$.

Les réponses aux questions sont alors les suivantes :

1. On montre ainsi que les trois termes sont unifiables et on obtient une instance commune qui est $p(f(g(g(v, w), f(g(v, w)))), g(v, w), f(g(v, w)))$

2. On échoue dans la dernière unification (t_1 et t_2, t_1 et t_3, t_3 et t_2 sont 2 à 2 unifiables, mais le résultat n'est pas unifiable avec le 3eme terme).

40. 1 et 2 non (capture de variable), 3 oui.

41. 1. $(\exists x \forall y \forall x' \exists y' \big(R(x,y) \supset Q(x',y')\big)$ et $(\forall x' \exists y' \exists x \forall y \big(R(x,y) \supset Q(x',y')\big)$ (entre autres, il y a en tout 6 possibilités : $\exists x \forall y \forall x' \exists y'$, $\exists x \forall x' \forall y \exists y'$, $\exists x \forall x' \exists y' \forall y$, $\forall x' \exists y' \exists x \forall y$, $\forall x' \exists x \exists y' \forall y$, $\forall x' \exists x \forall y \exists y'$.

2. $(\forall y \forall x' \big(R(a,y) \supset Q(x', f(y,x'))\big)$ et $(\forall x' \forall y \big(R(g(x'),y) \supset Q(x', h(x'))\big)$

42. 1 oui , 2 non (capture de variable), 3 non.

4. Une erreur très fréquente a été de renommer les variables libres : c'est faux et à éviter, en effet si F est une sous formule de $G = F \vee P(y)$, renommer la première occurrence de y dans F casse le lien entre les 2 occurrences libres de y dans la formule G. *Il faut toujours renommer les variables liées.* Nous obtenons l'une des formes prénexes équivalentes :

$$\exists x' \forall y' \exists z (R(x',y)) \wedge (R(x,z) \vee R(y',z))$$
$$\forall y' \exists x' \exists z (R(x',y)) \wedge (R(x,z) \vee R(y',z))$$
$$\forall y' \exists z \exists x' (R(x',y)) \wedge (R(x,z) \vee R(y',z))$$

5.
$$\forall y' (R(a,y)) \wedge (R(x, f(y')) \vee R(y', f(y')))$$
$$\forall y' (R(g(y'),y)) \wedge (R(x, f(y')) \vee R(y', f(y')))$$
$$\forall y' (R(g(y'),y)) \wedge (R(x, f(y')) \vee R(y', f(y')))$$

43. $x_4 = x_5$, $x_2 = f(c, g(x_5, x_5))$ et $x_6 = k(x_5, x_5, f(c, g(x_5, x_5)))$.

44. Les formes prénexes possibles de F sont

$$F_1 = \forall u \exists v [R(u) \vee R'(v)] \quad \text{et} \quad F_2 = \exists v \forall u [R(u) \vee R'(v)].$$

Notons que F, F_1 et F_2 sont équivalentes. Les Skolemisations correspondantes sont

$$F_1' = \forall u [R(u) \vee R'(f(u))] \quad \text{et} \quad F_2' = \forall u [R(u) \vee R'(a)].$$

Notons que F_1 et F_1' ne sont pas équivalentes, non plus que F_2 et F_2'.

45. Une forme prénexe possible pour F est $\forall u \exists v \forall w \exists z [R(u,v) \vee \neg R'(w,z)]$, d'où la Skolemisation $\forall u \forall w [R(u, f_1(u)) \vee \neg R'(w, f_2(u,w))]$.

Une autre forme prénexe possible pour F est $\forall u \forall w \exists v \exists z [R(u,v) \vee \neg R'(w,z)]$, d'où la Skolemisation $\forall u \forall w [R(u, f_1(u,w)) \vee \neg R'(w, f_2(u,w))]$.

46. Considérons alors les règles de réécriture suivantes :
$R_1 : +(x,\ 0) \rightarrow x$
$R_2 : +(x,\ s(y)) \rightarrow s(+(x,\ y))$

Pour vérifier dans SFP que 2 + 2 font 4, il faut montrer que le terme $+(s(s(0)),\ s(s(0)))$ se réécrit en $s(s(s(s(0))))$. Vérifier si une règle de réécriture s'applique une sous-expression d'une expression donnée est un problème de filtrage. La substitution trouvée sert pour obtenir la réécriture adéquate.

$$+(s(s(0)), s(s(0)))$$

On applique R2 au terme entier

$$s(+(s(s(0)), s(0)))$$

On applique R2 au sous-terme intérieur

$$s(s(+(s(s(0)), 0)))$$

On applique R1 au sous-terme intérieur

$$s(s(s(s(0))))$$

2. A partir de $+(0,\ s(s(z)))$ on obtient deux formes irréductibles différentes $s(s(z))$ et $s(s(+(0, z)))$ pour le terme donné. Il n'y a pas confluence du système de règles.

47. Pour appliquer le méta-théorème MT_i de la forme $H \vdash C$ une expression E il faut rechercher σ l'unificateur le plus général de H et E (si il existe) puis utiliser l'instance de MT_i vue travers σ pour produire $\sigma(C)$.

On obtient les résultats suivants :

1) $(B \supset (q \supset (A \supset B)))$

2) l'unification échoue

3) On a deux possibilités car MT_3 est de la forme $H_1, H_2 \vdash C$:

a) On unifie E avec H_1 et E' avec H_2 ce qui donne :

$$((p \supset a) \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$$

b) On unifie E avec H_2 et E' avec H_1 ce qui donne :

$$(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$$

48.

1. oui, en prenant $R = \emptyset$

2. il y en a quatre : si $E = \{a, b\}$, on prend $\gamma(R) = \emptyset$ ou $\gamma(R) = \{(a, b)\}$ ou $\gamma(R) = \{(b, a)\}$ ou $\gamma(R) = \{(a, b), (b, a)\}$

3. non car tout entier se divise lui-même

49.

1. non car si $E = \{a\}$ on ne peut avoir $(a,a) \in \gamma(R)$ et $a \neq a$.

2. il y en a quatre : si $E = \{a,b\}$, on prend $\gamma(R) = \{(a,b),(b,a)\}$ ou $\gamma(R) = \{(a,b),(b,a),(a,a)\}$ ou $\gamma(R) = \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$ ou $\gamma(R) = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$.
3.

- $R(n,m)$ ssi *"n divise m" toujours pas, car 0 ne divise que 0*
- $R(n,m)$ *ssi "m divise n" toujours pas, car 1 n'a que lui-même comme diviseur.*

50.

1. Soient $F = \{4,6,12\}$ et $S = \{0,1,2\}$, on pose $T = F \times S \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2.

`Tet`	: $\{(4,s,x,y) \mid (s,x,y) \in S \times \mathbb{N}^2\}$
`Cube`	: $\{(6,s,x,y) \mid (s,x,y) \in S \times \mathbb{N}^2\}$
`Dodec`	: $\{(12,s,x,y) \mid (s,x,y) \in S \times \mathbb{N}^2\}$
`Small`	: $\{(f,0,x,y) \mid (f,x,y) \in F \times \mathbb{N}^2\}$
`Medium`	: $\{(f,1,x,y) \mid (f,x,y) \in F \times \mathbb{N}^2\}$
`Large`	: $\{(f,2,x,y) \mid (f,x,y) \in F \times \mathbb{N}^2\}$
`Smaller`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y')) \in T \times T \mid s < s'\}$
`Larger`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y')) \in T \times T \mid s' < s\}$
`LeftOf`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y')) \in T \times T \mid y < y'\}$
`RightOf`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y')) \in T \times T \mid y' < y\}$
`BackOf`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y')) \in T \times T \mid x < x'\}$
`FrontOf`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y')) \in T \times T \mid x > x'\}$
`Between`	: $\{((f,s,x,y),(f',s',x',y'),(f'',s'',x'',y'')) \in T \times T \times T \mid x' < x \wedge x < x''\}$

3.

(i) *$LessFig[x,y]$ pour "x est une figure plus petite que y"*

$\neg\texttt{Dodec}(x) \wedge (\texttt{Tet}(x) \supset \neg\texttt{Tet}(y)) \wedge (\texttt{Cube}(x) \supset \texttt{Dodec}(y))$

(ii) *$EqFig[x,y]$ pour "x et y sont la même figure".*

$\neg LessFig[x,y] \wedge \neg LessFig[y,x]$ ou bien

$\big(\texttt{Tet}(x) \wedge \texttt{Tet}(y)\big) \vee \big(\texttt{Cube}(x) \wedge \texttt{Cube}(y)\big) \vee \big(\texttt{Dodec}(x) \wedge \texttt{Dodec}(y)\big)$

(iii) *$EqSize[x,y]$ pour "x est de la même taille que y".*

$\neg\texttt{Smaller}(x,y) \wedge \neg\texttt{Larger}(x,y)$

(iv) *$\Phi[x,y]$ qui donne l'ordre lexicographique (strict) sur l'ensemble T (on utilisera les définitions ci-dessus).*

$LessFig[x,y] \vee (EqFig[x,y] \wedge \texttt{Smaller}(x,y)) \vee (EqFig[x,y] \wedge EqSize[x,y] \wedge \texttt{BackOf}(x,y)) \vee (EqFig[x,y] \wedge EqSize[x,y] \wedge \neg\texttt{BackOf}(x,y) \wedge \neg\texttt{FrontOf}(x,y) \wedge \texttt{LeftOf}(x,y))$ *On pourrait factoriser...*

pour Pascal *je trouve plus simplement $LessFig[x,y] \vee (EqFig[x,y] \wedge \texttt{Smaller}(x,y))$ mais je n'ai pas du comprendre la question [ig]*

51.

1) F_1, F_4, F_5, F_6, F_7 *T-valides.*

2) F_6.

52.

1. car si l'on admettait une telle traduction , en remplaçant 3 par 2 dans l'énoncé, on admettrait l'existence d'un entier impair divisible par 2.

$\exists x(EntierImpair(x) \wedge DivisiblePar(3, x))$

2. • $\forall x(A(x) \vee B(x)) \supset (\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$;

On prend $E = \{a, b\}$ *(avec, bien sûr,* $a \neq b$*),* $\gamma(A) = \{a\}$ *et* $\gamma(B) = \{b\}$*. De façon générale, n'importe quelle interprétation telle que* $E = \gamma(A) \cup \gamma(B)$ *et* $\gamma(A) \cap \gamma(B) = \emptyset$ *convient.*

Un exemple classique est de prendre le domaine des entiers naturels et d'interpréter A *par le prédicat "être pair" et* B *par "être impair".*

• $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))$.

il faut toujours $\gamma(A) \cap \gamma(B) = \emptyset$ *mais* $\gamma(A) \neq \emptyset$ *et* $\gamma(B) \neq \emptyset$ *suffisent (i.e. pas besoin de* $\gamma(A) \cup \gamma(B) = E$*).*

3.

a) $\exists x(A(x) \supset B(x))$ *est conséquence de* $(\forall x A(x)) \supset \exists x B(x)$;

Soit $\bar{v}$ *telle que* $\bar{v}(\exists x(A(x) \supset B(x))) = 1$*, il existe donc* $\bar{v}_0$ *telle que* $\bar{v}_0(A(x) \supset B(x)) = 1$ *et* $\bar{v}(y) = \bar{v}_0(y)$ *pour toute variable* y *différente de* x*. On considère alors deux cas.*

1 *soit* $\bar{v}(\forall x A(x)) = 0$ *alors* $\bar{v}(\forall x A(x) \supset \exists x B(x))$ *est trivialement égal à* 1 ;

2 *soit* $\bar{v}(\forall x A(x)) = 1$ *alors, on a en particulier que* $\bar{v}_0(A(x)) = 1$*, d'où (par* $\bar{v}_0(A(x) \supset B(x)) = 1$*)* $\bar{v}_0(B(x)) = 1$ *et donc* $\bar{v}(\exists x B(x)) = 1$.

b) *et réciproquement*

Soit $\bar{v}$ *telle que* $\bar{v}(\forall x A(x) \supset \exists x B(x)) = 1$*, c'est-à-dire* $\bar{v}(\forall x A(x)) \leq \bar{v}(\exists x B(x))$*. On veut que* $\bar{v}(\exists x(A(x) \supset B(x))) = 1$*, c'est-à-dire, une certaine* $\bar{v}_0$ *telle que* $\bar{v}(y) = \bar{v}_0(y)$ *pour toute variable* y *différente de* x *et* $\bar{v}_0(A(x) \supset B(x)) = 1$*, c'est-à-dire* $\bar{v}_0(A(x)) \leq \bar{v}_0(B(x))$.

On raisonne encore pas cas sur la valeur de $\bar{v}(\forall x A(x))$:

1 *si* $\bar{v}(\forall x A(x)) = 0$*, on peut prendre* $\bar{v}_0 = \bar{v}$ *qui convient quelque soit la valeur que* $\bar{v}$ *donne à* $\exists x B(x)$;

2 *si* $\bar{v}(\forall x A(x)) = 1$*, alors par* $\bar{v}(\forall x A(x)) \leq \bar{v}(\exists x B(x))$*, il faut que* $\bar{v}(\exists x B(x)) = 1$*. On a donc notre valuation* $\bar{v}_0$ *telle que* $\bar{v}_0(B(x)) = 1$ *et* $\bar{v}_0(A(x)) \leq \bar{v}_0(B(x))$.

53.

1) *la formule dit que* R *est irréflexive et transitive, i.e. que c'est un ordre strict. C'est le cas de l'ordre strict sur (i) les entiers naturels (ii) les entiers relatifs et (iii) les rationnels*

ainsi que (iv) l'inclusion stricte sur les parties de $\mathbb{N}$ *; (v) l'inclusion large sur les parties de* $\mathbb{N}$ *est réflexive : (1) pas vrai.*

2) *la formule dit qu'il existe un élément minimum. C'est vrai de l'ordre LARGE sur les entiers, et (v) l'inclusion large. Mais ça n'est pas vrai de l'ordre strict sur les entiers (i), ni (ii) les relatifs ou (iii) les rationnels puisque l'on n'a pas* $0 < 0$)*, ni de l'inclusion stricte (iv) puisque on n'a pas* $R(\emptyset, \emptyset)$.

3) *la formule dit que tout élément est majoré (ou encore qu'il n'y a pas d'élément maximal pour les ordres stricts). C'est vrai de l'ordre sur (i) les entiers naturels, (ii) les entiers relatifs ainsi que (iii) les rationnels et (v). En revanche, (iv) l'ensemble* $\mathbb{N}$ *(qui est une partie de lui-même) n'est inclus (strictement) dans aucune autre partie de lui-même.*

4) *la formule dit qu'il existe un élément maximum. Ça n'est vrai que pour (v) l'ensemble des parties de* $\mathbb{N}$ *muni de la relation d'inclusion.*

5) *la formule dit que tout élément est minoré (ou encore qu'il n'y a pas d'élément minimal pour les ordres stricts).Faux pour (i) (0) (iv) (*$\emptyset$*), vrai pour (ii) (iii) et (v).*

6) *la formule est vraie pour (i) les entiers naturels et (ii) relatifs : pour tout* $\bar{x} = n$*, on prend* $\bar{x} = n + 1$*. Pour ce qui est (iii) des rationnels, on a un ordre dense : quelque soient les valeurs que l'on prenne pour* x *et* y*, on pourra toujours trouver un* z *entre* x *et* y *qui satisfait donc* $R(x, z)$*, mais ni* $z = y$ *ni* $R(y, z)$.

Pour ce qui est de (iv) l'ensemble de parties de $\mathbb{N}$*, on a vu en (3) que* $\mathbb{N}$ *n'est inclus (strictement) dans aucune partie de lui-même (ce qui invalide* $R(x, y)$*). Mais quand bien même on ne considèrerait que les parties propres, i.e. finies de* $\mathbb{N}$ *(ce qui élimine le cas limite de* $\mathbb{N}$ *lui-même), pour tout couple d'ensembles finis d'entiers* X *et* Y *tels que* $X \subset Y$*, on peut toujours trouver* Z *tel que* $X \subset Z$ *et* $Z \neq y$ *et* $Y \not\subset Z$ *: en effet, si* $X \subset Y$ *(inclusion stricte) alors* $Y - X \neq \emptyset$ *; il existe donc* $n \notin X$ *et* $Y' \subset \mathbb{N}$ *tel que* $Y = Y' \cup \{n\}$ *; comme* Y *est fini, on peut toujours trouver* $m \notin Y$*, on pose alors* $Z = Y' \cup \{m\}$*. De même pour (v).*

7) *la formule dit que l'ordre est dense. Ça n'est vrai que (iii) des rationnels et des parties de* $\mathbb{N}$ *avec l 'ordre large (on peut toujours prendre* $z = x$ *si ordre large).*

On remarquera que (2) implique (5) : renommer les variables liées x *et* y *et on trouve un schéma de formule* $\exists x \forall y R(x, y) \supset \forall y \exists x R(x, y)$*. De même (4) implique (3).*

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
(1)	oui	oui	oui	oui	non
(2)	non	non	non	non	oui
(3)	oui	oui	oui	non	oui
(4)	non	non	non	non	oui
(5)	non	oui	oui	non	oui
(6)	oui	oui	non	non	non
(7)	non	non	oui	non	oui

54. *1. pour mémoire, si* A *et* B *ne contiennent pas de quantificateurs :* $\neg \forall x A$, $\neg \exists x A$, $\forall x A \wedge \forall x B$, $\exists x A \wedge \exists x B$, $\forall x A \vee \forall x B$, $\exists x A \vee \exists x B$, $\forall x A \supset \forall x B$ *et* $\exists x A \supset \exists x B$.

$\exists x \neg A$, $\forall x \neg A$, $\forall x(A \wedge B)$, $\exists x_1 \exists x_2(A[x := x_1] \wedge B[x := x_2])$, $\forall x_1 \forall x_2(A[x := x_1] \vee B[x := x_2])$, $\exists x(A \vee B)$, $\exists x_1 \forall x(A[x := x_1] \supset B)$, $\forall x_1 \exists x(A[x := x_1] \supset B)$. *Avec* x_1 *et* x_2 *variables "nouvelles".*

2. $\exists x(P(x) \supset \forall x P(x))$ *devient* $\exists x \forall y(P(x) \supset P(y))$, *avec* y *variable "nouvelle".*

3. $\exists x P(x) \wedge \forall x(\exists y Q(y) \supset R(x))$ *devient* $\exists x' \forall x \exists y\big(P(x') \wedge (Q(y) \supset R(x))\big)$ *avec* x' *variable "nouvelle".*

4. $\forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \forall y(R(x, y) \supset \forall z(R(x, z) \supset z = y))$ *devient* $\forall x' \exists y' \forall x \forall y \exists\big(R(x', y') \wedge (R(x, y) \supset (R(x, z) \supset z = y))\big)$ *avec* x', y' *variables "nouvelles".*

5. Procédons par étapes

$$\forall z \in r.z \in x \times y) \wedge (\forall z \in x.\exists w_1 \in y.(z, w_1) \in r)$$

devient

$$\forall z_1 \forall z_2 \exists w_1(z_1 \in r \supset z_1 \in x \times y) \wedge (z_2 \in x \supset (w_1 \in y \wedge (z_2, w_1) \in r))$$

$$\exists f(Fonc(f) \wedge Dom(f) = x \wedge \forall z \in x.\forall w((z, w) \in f \supset (x, w) \in r)$$

devient

$$\exists f \forall z_3 \forall w_2(Fonc(f) \wedge Dom(f) = x \wedge (z_3 \in x \supset (z_3, w) \in f \supset (x, w) \in r))$$

en fin de compte, on a :

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y \forall r \exists z_1 \exists z_2 \forall w_1 \exists f \forall z_3 \forall w_2 \\ &\qquad (z_1 \in r \supset z_1 \in x \times y) \wedge (z_2 \in x \supset (w_1 \in y \wedge (z_2, w_1) \in r)) \\ &\qquad \supset (Fonc(f) \wedge Dom(f) = x \wedge (z_3 \in x \supset (z_3, w) \in f \supset (x, w) \in r)) \end{aligned}$$

55.

C'est : $\exists x(P(x) \supset \forall x P(x))$

56. *1. N N O N*

2. O N O O

3. $Q_I(n)$ *toujours vrai et* $P_I(n)$ *toujours faux*

$P_I(n)$ *vrai si et seulement si 3 divise* n *et* $Q_I(n)$ *vrai si et seulement si* $n = 0$ *ou 3 ne divise pas* n

58. $I_0 = \{arc(a,b)\,, arc(b,c)\,, chemin(a,b)\,, chemin(b,c)\,, chemin(a,c)\}$, *et aussi, pour tout* $K \subset \{a,b,c\}^2$,

$$\begin{aligned}
I_K &= I_0 \cup \{chemin(l,l') \,/\, (l,l') \in K\} \\
J_K &= I_0 \cup \{arc(l,l') \,/\, (l,l') \in K\} \cup \{chemin(l,l') \,/\, (l,l') \in K\} \\
&\quad \cup \{chemin(l,l') \,/\, (l,l_1) \in K \text{ et } (l_1,l') \in K\} \\
&\quad \cup \{chemin(l,l') \,/\, (l,l_1) \in K \text{ et } (l_1,l_2) \in K \text{ et } (l_2,l') \in K\}
\end{aligned}$$

En d'autres termes, sur un graphe ayant exactement trois sommets a, b, et c, les modèles de Herbrand *de $\mathcal{F}$ donnent les relations chemin telles que*

(i) *chemin est une relation transitive (à cause de la formule r_4) ;*

(ii) *chemin contient la relation arc (à cause de la formule r_3) ;*

(iii) *la relation arc contient au moins un arc de a à b et un arc de b à c (à cause des formules r_1 et r_2).*

(i) et (ii) signifient que chemin est la fermeture transitive de arc.

59.

0) $\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall y\, Q(x,y)$	*hypothèse*
1) $\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash Q(x,y)$	*instanciation*
2) $\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall x\, \neg Q(x,y)$	*hypothèse*
3) $\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \neg Q(x,y)$	*instanciation*
4) $\forall y\, Q(x,y) \vdash \neg \forall x\, \neg Q(x,y)$	*absurde*
5) $\forall y\, Q(x,y) \vdash \exists x\, Q(x,y)$	*définition de* $\exists$
6) $\forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	*généralisation universelle*
	car y non libre dans $\forall y\, Q(x,y)$
7) $\exists x\, \forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	*généralisation existentielle*
	car x non libre dans $\forall y\, \exists x Q(x,y)$ $\square$

2. Le théorème est : $\exists x\ \forall y\ Q(x,y) \supset \forall y\ \exists x\ Q(x,y)$. Sa réciproque $\forall y\ \exists x\ Q(x,y) \supset \exists x\ \forall y\ Q(x,y)$ est fausse : sur $\mathbb{N}$, si $Q(x,y)$ ssi $x \geq y$, $\forall y\ \exists x\ Q(x,y)$ est vrai, alors que $\exists x\ \forall y\ Q(x,y)$ est faux, donc l'implication $\forall y\ \exists x\ Q(x,y) \supset \exists x\ \forall y\ Q(x,y)$ est fausse.

60.

1) $\phi \ \vdash \ \exists y \Big(p(x) \wedge q(y) \Big)$ *(instantiation)*

$\phi \ \vdash \ p(x) \wedge \Big(\exists y q(y) \Big)$ *(prénexe1, y non libre dans $p(x)$)*

$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big)$ *(généralisation, x non libre dans ϕ)*

$\phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$ *(prénexe2, x non libre dans $\exists y q(y)$)*

$\phi \vdash \exists y\Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(prénexe1, y non libre dans $\forall x p(x)$)*

$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(prénexe2, x non libre dans $q(y)$)*

2) $\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(instantiation)*

$\phi \vdash \neg\forall y \neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(définition de $\exists$)*

$\phi \vdash \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(FAUX)*

$\phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(double négation)*

$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(généralisation, x non libre dans ϕ)*

$\phi \vdash \neg\forall y \neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(non justifié)*

$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$ *(définition de $\exists$)*

un contrex. parmi d autres les entiers avec $p(x)$ ssi $x \geq 0$ et $q(x)$ ssi $x = 0$.

61.

1. Il s'agit de montrer comment, à partir des preuves des séquents $F_1 \vdash F_2$ et $\mathcal{F} \vdash F_1$, on peut obtenir une preuve du séquent $\mathcal{F} \vdash F_2$.

(1)	$F_1 \vdash F_2$	*(Séquent prouvé)*
(2)	$\vdash F_1 \supset F_2$	*(Synthèse (1))*
(3)	$\mathcal{F} \vdash F_1 \supset F_2$	*(Augmentations (2))*
(4)	$\mathcal{F} \vdash F_1$	*(Séquent prouvé)*
(5)	$\mathcal{F} \vdash F_2$	*(MP (3) et (4))*

2. $F \vee F' \vdash \neg F \supset F'$

(1)	$F, \neg F, \neg F' \vdash F$	*(Hypothèse)*
(2)	$F, \neg F, \neg F' \vdash \neg F$	*(Hypothèse)*
(3)	$F, \neg F \vdash \neg\neg F'$	*(Absurde (1) et (2))*
(4)	$F, \neg F \vdash F'$	*(Double Neg. 2 (3))*
(5)	$F \vdash \neg F \supset F'$	*(Synthèse (4))*
(6)	$F', \neg F \vdash F'$	*(Hypothèse)*
(7)	$F' \vdash \neg F \supset F'$	*(Synthèse (6))*
(8)	$F \vee F' \vdash \neg F \supset F'$	*($\vee$-2 (5) et (7))*

3.

(1) $\mathcal{F} \vdash A \vee B$ *(Séquent prouvé)*
(2) $\mathcal{F} \vdash \neg A \supset B$ *($\vee\supset$-ex1 (1))*
(3) $\mathcal{F}, \neg A \vdash \neg A \supset B$ *(Augmentation (2))*
(4) $\mathcal{F}, \neg A \vdash \neg A$ *(Hypothèse)*
(5) $\mathcal{F}, \neg A \vdash B$ *(MP (3) et (4))*
(6) $\mathcal{F}, B \vdash C$ *(Séquent prouvé)*
(7) $\mathcal{F} \vdash B \supset C$ *(Synthèse (6))*
(8) $\mathcal{F}, \neg A \vdash B \supset C$ *(Augmentation (7))*
(9) $\mathcal{F}, \neg A \vdash C$ *(MP (5) et (8))*
(10) $\mathcal{F}, A \vdash C$ *(Séquent prouvé)*
(11) $\mathcal{F} \vdash C \vee C$ *($\vee$-1 (9) et (10))*
(12) $\mathcal{F} \vdash \neg C \supset C$ *($\vee\supset$-ex1 (11))*
(13) $\mathcal{F}, \neg C \vdash \neg C \supset C$ *(Augmentation (12))*
(14) $\mathcal{F}, \neg C \vdash \neg C$ *(Hypothèse)*
(15) $\mathcal{F}, \neg C \vdash C$ *(MP (13) et (14))*
(16) $\mathcal{F} \vdash \neg\neg C$ *(Absurde (14) et (15))*
(17) $\mathcal{F} \vdash C$ *(Double Neg. 2)*

ou

(1) $\mathcal{F} \vdash A \vee B$ *(Séquent prouvé)*
(2) $\mathcal{F}, B \vdash C$ *(Séquent prouvé)*
(3) $\mathcal{F}, A \vdash C$ *(Séquent prouvé)*
(4) $\mathcal{F}, A \vee B \vdash C$ *($\vee$-2 (2) et (3))*
(5) $\mathcal{F} \vdash A \vee B \supset C$ *(synthèse)*
(6) $\mathcal{F} \vdash C$ *(MP (1) et (5))*

4.

(1) $\mathcal{F} \vdash A$ *(Séquent prouvé)*
(2) $\mathcal{F}, \neg A \vdash A$ *(Augmentation (1))*
(3) $\mathcal{F}, \neg A, \neg B \vdash A$ *(Augmentation (2))*
(4) $\mathcal{F}, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ *(Hypothèse)*
(5) $\mathcal{F}, \neg A \vdash \neg\neg B$ *(Absurde (3) et (4))*
(6) $\mathcal{F}, \neg A \vdash B$ *(Double Neg. 2 (5))*
(7) $\mathcal{F}, A \vdash A$ *(Hypothèse)*
(8) $\mathcal{F} \vdash A \vee B$ *($\vee$-1 (6) et (7))*

ou bien encore

(1) $\mathcal{F} \vdash A$ *(Séquent prouvé)*
(2) $\mathcal{F}, \neg B \vdash A$ *(Augmentation (1))*
(3) $\mathcal{F}, \neg\neg B \vdash \neg\neg B$ *(Hypothèse)*
(4) $\mathcal{F}, \neg\neg B \vdash B$ *(double négation)*
(5) $\mathcal{F} \vdash A \vee B$ *($\vee$-1 (2) et (4))*

et pour le second

(1) $\mathcal{F} \vdash B$ *(Séquent prouvé)*
(2) $\mathcal{F}, \neg A \vdash B$ *(Augmentation (1))*
(3) $\mathcal{F}, \neg A, \neg B \vdash B$ *(Augmentation (2))*
(4) $\mathcal{F}, \neg A, \neg B \vdash \neg B$ *(Hypothèse)*
(5) $\mathcal{F}, \neg B \vdash \neg\neg A$ *(Absurde (3) et (4))*
(6) $\mathcal{F}, \neg B \vdash A$ *(Double Neg. 2 (5))*
(7) $\mathcal{F}, B \vdash B$ *(Hypothèse)*
(8) $\mathcal{F} \vdash A \vee B$ *($\vee$-1 (6) et (7))*

5.

(1)	$\forall xA \vee \forall xB \vdash \forall xA \vee \forall xB$	(Hypothèse)
(2)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xA \vdash \forall xA$	(Hypothèse)
(3)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xA \vdash A$	(Instance (2) avec $[x := x]$)
(4)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xA \vdash A \vee B$	($\vee_i^g$ (3))
(5)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xA \vdash \forall x(A \vee B)$	(Généralisation (4))
(6)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xB \vdash \forall xB$	(Hypothèse)
(7)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xB \vdash B$	(Instance (6) avec $[x := x]$)
(8)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xB \vdash A \vee B$	($\vee_i^d$ (7))
(9)	$\forall xA \vee \forall xB, \forall xB \vdash \forall x(A \vee B)$	(Généralisation (8))
(10)	$\forall xA \vee \forall xB \vdash \forall x(A \vee B)$	($\vee$-ex1 (1), (5) et (9))
(11)	$\vdash \forall xA \vee \forall xB \supset \forall x(A \vee B)$	(Synthèse (10))

62.

1.

(1)	$\mathcal{F}, A \vdash C$	(Séquent prouvé)
(2)	$\mathcal{F}, A, \neg C \vdash C$	(Augmentation (1))
(3)	$\mathcal{F}, A, \neg C \vdash \neg C$	(Hypothèse)
(4)	$\mathcal{F}, \neg C \vdash \neg A$	(Absurde (2) et (3))
(5)	$\mathcal{F}, \neg C \vdash \forall x \neg A$	(Généralisation (4))
(6)	$\mathcal{F}, \neg C, \neg\forall x\neg A \vdash \forall x \neg A$	(Augmentation (5))
(7)	$\mathcal{F}, \neg C, \neg\forall x\neg A \vdash \neg\forall x \neg A$	(Hypothèse)
(8)	$\mathcal{F}, \neg\forall x\neg A \vdash \neg\neg C$	(Absurde (6) et (7))
(9)	$\mathcal{F}, \neg\forall x\neg A \vdash C$	(Double Neg. 2 (8))
(10)	$\mathcal{F} \vdash \exists xA$	(Séquent prouvé)
(11)	$\mathcal{F} \vdash \neg\forall x\neg A$	($\exists$-1 (10))
(12)	$\mathcal{F} \vdash \neg\forall x\neg A \supset C$	(Synthèse (9))
(13)	$\mathcal{F} \vdash C$	(MP (11) et (12))

2.

(1)	$\mathcal{F}, \forall x\neg A \vdash \forall x\neg A$	(Hypothèse)
(2)	$\mathcal{F}, \forall x\neg A \vdash \neg A[x := t]$	(Instance (1))
(3)	$\mathcal{F} \vdash A[x := t]$	(Séquent prouvé)
(4)	$\mathcal{F}, \forall x\neg A \vdash A[x := t]$	(Augmentation (3))
(5)	$\mathcal{F} \vdash \neg\forall x\neg A$	(Absurde (2) et (4))
(6)	$\mathcal{F} \vdash \exists xA$	($\exists$-2 (5))

3.

(1)	$A \wedge B \vdash A \wedge B$	(Hypothèse)
(2)	$A \wedge B \vdash A$	($\wedge$-elim 1 (1))
(3)	$A \wedge B \vdash B$	($\wedge$-elim 2 (1))
(4)	$A \wedge B \vdash \exists xA$	($\exists_i$ (2) $[x := x]$)
(5)	$A \wedge B \vdash \exists xB$	($\exists_i$ (3) $[x := x]$)
(6)	$A \wedge B \vdash \exists xA \wedge \exists xB$	($\wedge$-intro (4) et (5))
(7)	$\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA \wedge \exists xB$	(Augmentation (6))
(8)	$\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x(A \wedge B)$	(Hypothèse)
(9)	$\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$	($\exists_e$ (7) et (8))
(10)	$\vdash \exists x(A \wedge B) \supset \exists xA \wedge \exists xB$	(Synthèse (9))

4. La preuve est incorrecte : à l'étape (3) on ne peut pas utiliser la règle ($\exists_e$) puisque x est libre dans A. Exemple : prendre $\mathbb{N}$ avec $A(n)$ vrai ssi n est pair.

63.

1.	(1)	$\mathcal{F}, A \vdash B$	(Séquent prouvé)
	(2)	$\mathcal{F}, \neg A \vdash B$	(Séquent prouvé)
	(3)	$\mathcal{F} \vdash B \vee B$	($\vee$-1 (1) et (2))
	(4)	$\mathcal{F} \vdash \neg B \supset B$	($\vee \supset$-ex1 (3))
	(5)	$\mathcal{F}, \neg B \vdash \neg B \supset B$	(Augmentation (4))
	(6)	$\mathcal{F}, \neg B \vdash \neg B$	(Hypothèse)
	(7)	$\mathcal{F}, \neg B \vdash B$	(MP (5) et (6))
	(8)	$\mathcal{F} \vdash \neg\neg B$	(Absurde (6) et (7))
	(9)	$\mathcal{F} \vdash B$	(Double Neg. 2 (8))
2.	(1)	$\mathcal{F}, \forall x \neg\neg A \vdash \forall x \neg\neg A$	(Hypothèse)
	(2)	$\mathcal{F}, \forall x \neg\neg A \vdash \neg\neg A$	(Instance (1) $[x := x]$)
	(3)	$\mathcal{F}, \forall x \neg\neg A \vdash A$	(Double Neg. 2 (2))
	(4)	$\mathcal{F}, \forall x \neg\neg A \vdash \forall x A$	(Généralisation (3) car x non libre ds $\mathcal{F}$)
	(5)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A, \forall x \neg\neg A \vdash \forall x A$	(Augmentation (4))
	(6)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A, \forall x \neg\neg A \vdash \neg\neg\forall x A$	(Double Neg. 1 (5))
	(7)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A, \forall x \neg\neg A \vdash \neg\forall x A$	(Hypothèse)
	(8)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A \vdash \neg\forall x \neg\neg A$	(Absurde (6) et (7))
	(9)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A \vdash \exists x \neg A$	($\exists$-2 (8))
	(10)	$\mathcal{F}, \exists x \neg A \vdash C$	(Séquent prouvé)
	(11)	$\mathcal{F} \vdash \exists x \neg A \supset C$	(Synthèse (10))
	(12)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A \vdash \exists x \neg A \supset C$	(Augmentation (11))
	(13)	$\mathcal{F}, \neg\forall x A \vdash C$	(MP (9) et (12))
3.	(1)	$\exists x \neg A \vdash \exists x \neg A$	(Hypothèse)
	(2)	$\neg\forall x A \vdash \exists x \neg A$	($\forall_m$ (1))
	(3)	$\neg\forall x A \vdash \forall x A \vee \exists x \neg A$	($\vee_i^d$ (2))
	(4)	$\forall x A \vdash \forall x A$	(Hypothèse)
	(5)	$\forall x A \vdash \forall x A \vee \exists x \neg A$	($\vee_i^g$ (4))
	(6)	$\vdash \forall x A \vee \exists x \neg A$	(TE (3) et (5))

64.

1.	(1)	$\mathcal{F}, F \vdash G$	(Séquent prouvé)
	(2)	$\mathcal{F}, F, \exists x F \vdash G$	(Augmentation (1))
	(3)	$\mathcal{F}, \exists x F \vdash \exists x F$	(Hypothèse)
	(4)	$\mathcal{F}, \exists x F \vdash G$	(($\exists_e$) (2) et (3))

ou encore, on prouve d'abord

$$(lemme) : \frac{\mathcal{F} \vdash \forall x\, \neg F}{\mathcal{F} \vdash \neg\exists x F}$$

1)	$\mathcal{F} \vdash \forall x\, \neg F$	
2)	$\mathcal{F}, \exists x F \vdash \forall x\, \neg F$	(augmentation)
3)	$\mathcal{F}, \exists x F \vdash \exists x F$	(hypothèse)
4)	$\mathcal{F}, \exists x F \vdash \neg\forall x\, \neg F$	(définition de $\exists$)
5)	$\mathcal{F} \vdash \neg\exists x F$	(par l'absurde)

et ensuite

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \mathcal{F}, F \vdash G & (\textit{Séquent prouvé}) \\
(2) & \mathcal{F}, F, \neg G \vdash G & (\textit{augmentation}) \\
(3) & \mathcal{F}, F, \neg G \vdash \neg G & (\textit{hypothèse}) \\
(4) & \mathcal{F}, \neg G \vdash \neg F & (\textit{par l'absurde}) \\
(5) & \mathcal{F}, \neg G \vdash \forall x \ \neg F & (\textit{généralisation car } x \textit{ non libre dans } \neg G \textit{ et } \mathcal{F}) \\
(6) & \mathcal{F}, \neg G \vdash \neg\exists x \ F & (\textit{lemme}) \\
(7) & \mathcal{F}, \neg G, \exists x F \vdash \neg\exists x \ F & (\textit{augmentation}) \\
(8) & \mathcal{F}, \neg G, \exists x F \vdash \exists x \ F & (\textit{hypothèse}) \\
(9) & \mathcal{F}, \exists x F \vdash \neg\neg G & (\textit{par l'absurde}) \\
(10) & \mathcal{F}, \exists x F \vdash G & (\textit{double négation}) \quad \square
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall y F, \forall x \neg F \vdash \forall y F & (\textit{Hypothèse}) \\
(2) & \forall y F, \forall x \neg F \vdash F & (\textit{Instance (1)} [y := y]) \\
(3) & \forall y F, \forall x \neg F \vdash \forall x \neg F & (\textit{Hypothèse}) \\
(4) & \forall y F, \forall x \neg F \vdash \neg F & (\textit{Instance (3)} [x := x]) \\
(5) & \forall y F \vdash \neg\forall x \neg F & (\textit{Absurde (2) et (4)}) \\
(6) & \forall y F \vdash \exists x F & (\exists\textit{-2 (5)}) \\
(7) & \forall y F \vdash \forall y \exists x F & (\textit{Géneralisation (6) car } y \textit{ non libre ds } \forall y F) \\
(8) & \exists x \forall y F \vdash \forall y \exists x F & ((\exists_i^g) \textit{ (7) car } x \textit{ non libre ds..}) \\
(9) & \vdash \exists x \forall y F \supset \forall y \exists x F & (\textit{Synthèse (8)})
\end{array}
$$

3. Le séquent $\forall y \exists x F \supset \exists x \forall y F$ est faux. On peut par exemple se placer dans une structure dont le domaine est l'ensemble des entiers naturels et considérer pour F la formule $x > y$. Dans cet exemple, on a clairement $\forall y \exists x(x > y)$, puisque tout entier admet un successeur, mais on n'a pas $\exists x \forall y(x > y)$ puisqu'il n'existe pas d'entiers strictement supérieur à tous les autres.

65. *$\forall x p(x) \supset p(x)$ est clairement une instance de l'axiome (instance) tandis que $\forall x \exists y R(x, y) \supset \exists y R(y, y)$ n'en est pas une puisque y est liée dans $\exists y R(x, y)$. En effet, une interprétation possible de cette formule est "si toute chose admet une chose plus grande, alors il y a une chose plus grande qu'elle-même", qui est clairement fausse.*

66.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall y p(y) \supset p(y) & (\textit{instance } [y := y]) \\
(2) & p(y) \supset \exists y p(y) & (\textit{exist}) \\
(3) & \forall y p(y) & (\textit{hypothèse}) \\
(4) & p(y) & (\textit{MP (1) et (3)}) \\
(5) & \exists y p(y) & (\textit{MP (2) et (4)})
\end{array}
$$

67.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p(a) \supset \forall x q(x) & (\textit{hypothèse}) \\
(2) & \exists x p(x) \supset \forall x q(x) & (\exists_i \textit{ (1)}) \\
(3) & \forall x q(x) \supset q(a) & (\textit{instance}) \\
(4) & \exists x p(x) \supset q(a) & (\textit{Transitivité de } \supset \textit{ sur (3) et (2)})
\end{array}
$$

68.

$$F_1 \colon \forall y \forall x \Big(\neg(leftof(x, y) \vee leftof(y, x)) \supset x = y \Big) = \forall y \forall x \phi$$

$$F_2 \colon \forall y \forall x \Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset \neg(leftof(x, y) \vee leftof(y, x)) \Big) = \forall y \forall x \psi$$

$$F_3 \colon \forall y \forall x \Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x \Big)$$

2. La forme clausale de $F_1, F_2, \neg F_3$ est (sans les $\forall$)

$leftof(x,y) \vee leftof(y,x) \vee x = y$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x,y)$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y,x)$, $cube(x)$, $\neg cube(y)$, $\neg x = y$

La déduction avec Hilbert est comme suit

1)	$F_1 \supset \phi$	(instantiation)
2)	$F_2 \supset \psi$	(instantiation)
3)	F_1	(hypothèse)
4)	F_2	(hypothèse)
5)	ϕ	(modusponens 1+3)
6)	ψ	(modusponens 2+4)
7)	$(cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x$	(Prop. 1.15 (v))
8)	$finir$	$commeexemple 1.87 page 33-34$

69. Forme clausale de $p \wedge q, \neg(p \vee q)$ est $p, q, \neg p, \neg q$.

1.

1)	$p \wedge q \vdash p \wedge q$	(hypothèse)
2)	$p \wedge q \vdash p$	(élim et1)
3)	$p \wedge q \vdash q$	(élim et2)
4)	$p \wedge q, p \vdash p$	(augmentation sur 2))
5)	$p \wedge q, \neg p \vdash q$	(augmentation sur 3))
6)	$p \wedge q \vdash p \vee q$	(introd. de ou)

2. résolution immédiate à partir de la forme clausale $\dfrac{p \qquad \neg p}{\square}$

70. de $C_2, C_3, \neg P(f(a), b)$ on déduit la clause vide puis de $C_1, \neg R(f(f(a)), b)$ on déduit la clause vide.

72. 1. $\{\neg P(x) \vee P(f(x)), P(f(a)), \neg P(f(f(a)))\}$.

on prend l'énumération $[P(f(a)), P(f(f(a)))]$ et la substitution $[x := f(a)]$

2. $\{\neg P(x) \vee Q(x), P(f(y)), \neg Q(f(y))\}$.

on prend la substitution $[x := f(a), y := a]$ et l'énumération $[P(f(a)), Q(f(a))]$.

3. $\{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee S(x,z), R(f(x'), x'), \neg S(y', a)\}$.

ici, il faut prendre deux instances de $R(f(x'), x')$: $R(f(a), a)$ et $R(f(f(a)), f(a))$.

On prend alors la substitution $[x := f(f(a)), y := f(a), z := a, y' := f(f(a))]$.

Ça donne l'ensemble de clauses

$\{\neg R(f(f(a)), f(a)) \quad \vee \quad \neg R(f(a), a) \quad \vee \quad S(f(f(a)), a), R(f(a), a), R(f(f(a)), f(a)), \neg S(f(f(a)), a)\}$.

On énumère $[S(f(f(a)), a), R(f(a), a), R(f(f(a)), f(a))]$.

73. *1. Négation :* $\forall x \exists y \forall z((\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee \neg Q(x)) \wedge (P(y) \vee P(z)) \wedge (Q(y) \vee Q(z)))$

Skolémisation avec $[y := f_1(x)]$ *on obtient les trois clauses :*

$C_1 = (\neg P(x) \vee \neg P(f_1(x)) \vee \neg Q(x))$, $C_2 = (P(f_1(x)) \vee P(z))$, *et* $C_3 = (Q(f_1(x)) \vee Q(z)))$. *Ne pas oublier de renommer les variables avant d'appliquer la résolution.*

C_1 C_2 *donnent* $\neg P(x) \vee \neg Q(x)$,

avec C_3, $\neg P(x)$,

avec C_2, *clause vide* $\Box$.

Arbres sémantiques : On prend les instances :

$C_1' = C_1[x := f_1(a), z := f_1(a)] = \neg(P(f_1(a)) \vee \neg P(f_1(f_1(a))) \vee \neg Q(f_1(a))$

$C_2' = C_2[x := a, z := f_1(a)] \equiv P(f_1(a))$

$C_2'' = C_2[x := f_1(a), z := f_1(f(_1 a))] \equiv P(f_1(f_1(a)))$

$C_3' = C_3[x := a, z := f(_1 a)] \equiv Q(f_1(a))$

On prend l'énumération : $[P(f_1(a)); Q(f_1(a)); P(f_1(f_1(a)))]$.

2. $\exists x \forall y \exists z(R(x, y) \vee \neg R(y, y) \vee (\neg R(y, z) \wedge y \neq z))$.

Négation : $\forall x \exists y \forall z(\neg R(x, y) \wedge R(y, y) \wedge (R(y, z) \vee y = z))$

Skolémisation : $\neg R(x, f_1(x)) \wedge R(f_1(x), f_1(x)) \wedge (R(f_1(x), z) \vee f_1(x) = z)$

Clauses : $C_1 = \neg R(x, f_1(x))$ $\quad C_2 = R(f_1(x), f_1(x))$ $\quad C_3 = (R(f_1(x), z) \vee f_1(x) = z)$

C_1 C_3 *donnent* $f_1(x) = f_1(f_1(x))$, *donc je peux remplacer* $f_1(f_1(x))$ *par* $f_1(x)$ *et vice-versa*

C_1 C_2 *(le second* $f_1(x)$ *remplacé par* $f_1(f_1(x))$ *dans* C_2 *) donnent clause vide* $\Box$.

Arbres sémantiques :On utilise les instances suivantes :

$C_1 = \neg R(x, f_1(x))[x := f_1(a)] = \neg R(f_1(a), f_1(f_1(a)))$

$C_2 = R(f_1(x), f_1(x))[x := a] = R(f_1(a), f_1(a))$

$C_3 = (R(f_1(x), z) \vee f_1(x) = z)[x := a, z := f_1(f_1(a))] = R(f_1(a), f_1(f_1(a))) \vee f_1(a) = f_1(f_1(a))$

On prend l'énumération : $[R(f_1(a), f_1(f_1(a))); f_1(a) = f_1(f_1(a))]$

Voici comment on construit un arbre en utilisant une équation :

Si $R(f_1(a), f_1(f_1(a)))$ *on contredit* C_1

Si $\neg R(f_1(a), f_1(f_1(a)))$

Si $f_1(a) = f_1(f_1(a))$ *(on a par réécriture* $\neg R(f_1(a), f_1(a)))$

qui contredit C_2

Si $f_1(a) \neq f_1(f_1(a))$

on contredit C_3

3. $\exists x \forall y \exists z \exists w(\neg R(x, y) \vee (R(y, z) \wedge R(z, w) \wedge y \neq w) \vee (R(y, z) \wedge R(z, y)))$.

Négation : $\forall x \exists y \forall z \forall w (R(x,y) \wedge (\neg R(y,z) \vee \neg R(z,w) \vee y = w) \wedge (\neg R(y,z) \vee \neg R(z,y))$

Skolémisation : $R(x, f_1(x)) \wedge (\neg R(f_1(x), z) \vee \neg R(z,w) \vee f_1(x) = w) \wedge (\neg R(f_1(x), z) \vee \neg R(z, f_1(x))$

Clauses : $C_1 = R(x, f_1(x))$ $C_2 = (\neg R(f_1(x), z) \vee \neg R(z,w) \vee f_1(x) = w)$ $C_3 = (\neg R(f_1(x), z) \vee \neg R(z, f_1(x))$

C_1 C_2 donnent $\neg R(f_1(x), z) \vee f_1(x) = w$,

avec C_1, $f_1(x) = f_1^3(x)$, *ensuite*

C_1 C_3 donnent $\neg R(f_1^2(x), f_1(x))$ *et on remplace $f_1(x)$ par $f_1^3(x)$*

avec C_1, clause vide $\square$.

Arbres sémantiques :On prend les instances suivantes :

$$\begin{aligned}
C_1' &= R(x, f_1(x))[x := f_1(a)] = R(f_1(a), f_1(f_1(a))) \\
C_1'' &= R(x, f_1(x))[x := f_1(f_1(a))] = R(f_1(f_1(a)), f_1(f_1(f_1(a)))) \\
C_2' &= (\neg R(f_1(x), z) \vee \neg R(z,w) \vee f_1(x) = w)[x := a; z := f_1(f_1(a)); w := f_1(f_1(f_1(a)))] \\
&= \neg R(f_1(a), f_1(f_1(a))) \vee \neg R(f_1(f_1(a)), f_1(f_1(f_1(a)))) f_1(a) = f_1(f_1(f_1(a))) \\
C_3' &= (\neg R(y,z) \vee \neg R(z,y))[y := f_1(a); z := f_1(f_1(a))] \\
&= \neg R(f_1(a), f_1(f_1(a))) \vee \neg R(f_1(f_1(a)), f_1(a))
\end{aligned}$$

On prend l'énumération : $[R(f_1(a), f_1(f_1(a))); R(f_1(f_1(a)), f_1(a)); f_1(a) = f_1(f_1(f_1(a)))]$

Enumération $p = R(f_1(a), f_1(f_1(a)))$, $q = R(f_1(f_1(a)), f_1(a))$, $r = (f_1(a) = f_1(f_1(f_1(a))))$

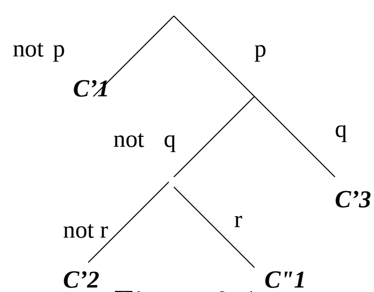

Figure 0.4

On construit :

Si $R(f_1(a), f_1(f_1(a)))$

Si $R(f_1(f_1(a)), f_1(a))$ *on contredit* C_3'

Si $\neg R(f_1(f_1(a)), f_1(a))$

Si $f_1(a) = f_1(f_1(f_1(a)))$

(on a par réécriture $\neg R(f_1(f_1(a)), f_1(f_1(f_1(a)))))$ *ce qui contredit* C_1''

Si $f_1(a) \neq f_1(f_1(f_1(a)))$ *on contredit* C_2'

Si $\neg R(f_1(a), f_1(f_1(a)))$ *on contredit* C_1'

74. *Forme prénexe*

$F_1 : \forall x \forall y((A(x) \wedge B(y)) \supset (U(x) \vee V(y)))$

$F_2 : \forall x \forall y(U(x) \supset (A(y) \supset R(x,y)))$.

$F_3 : \forall x \forall y \forall z((B(x) \wedge V(y)) \supset S(x,y,z))$.

$F_4 : \exists x' \forall x \forall y \forall z(\neg C(x') \supset (\neg R(x,y) \wedge \neg S(x,y,z)))$.

$\neg G : \forall x \forall y \forall x'(A(x) \wedge (B(y) \wedge \neg C(x')))$.

Skolemisées (et éliminer les $\supset$) :

$F_1' : \forall x \forall y\ ((\neg A(x) \vee \neg B(y)) \vee (U(x) \vee V(y)))$

$F_2' : \forall x \forall y(\neg U(x) \vee (\neg A(y) \vee R(x,y)))$.

$F_3' : \forall x \forall y \forall z\ (\neg B(x) \vee \neg V(y) \vee S(x,y,z))$.

$F_4' : \forall x \forall y \forall z\ (C(a) \vee (\neg R(x,y) \wedge \neg S(x,y,z)))$.

Forme clausale :

$F_1 : \forall x \forall y\ ((\neg A(x) \vee \neg B(y)) \vee (U(x) \vee V(y)))$

$F_2 : \forall x \forall y\ (\neg U(x) \vee \neg A(y) \vee R(x,y))$.

$F_3 : \forall x \forall y \forall z\ (\neg B(x) \vee \neg V(y) \vee S(x,y,z))$.

$F_{41}' : \forall x \forall y\ ((C(a) \vee \neg R(x,y))$.

$F_{42}' : \forall x \forall y \forall z\ (C(a) \vee \neg S(x,y,z))$.

$G_1 : \forall x A(x)$.

$G_2 : \forall y B(y)$.

$G_3 : \forall x' \neg C(x')$.

De F_1 *et* G_1, $\neg B(y)) \vee (U(x) \vee V(y))$

Avec G_2, $U(x') \vee V(y')$

Avec F_2, $V(y') \vee \neg A(y) \vee R(x,y)$

Avec F_{41}', $V(y') \vee \neg A(y) \vee C(a)$

Avec F_3, $\neg A(y) \vee C(a) \vee \neg B(x'') \vee S(x'',y'',z''))$

Avec F_{42}', $\neg A(y) \vee C(a) \vee \neg B(x'')$

ensuite on élimine le reste avec G_1, G_2, G_3.

Arbre sémantique : énumération $p1 = A(a), p2 = B(a), p3 = C(a), p4 = R(a,a), p5 = U(a), p6 = V(a), p7 = S(a,a,a)$.

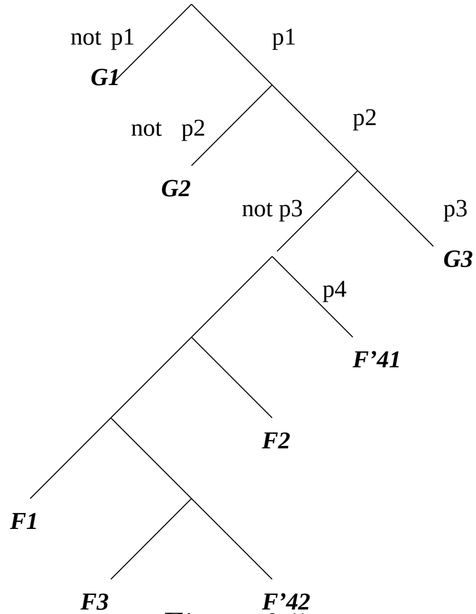

Figure 0.5

75. *Négation du but :* $F_1' = \forall x(renc(moi,\ x)$ *et* $F_1'' = \forall x\ s(x)$. *Soient*

$$\begin{aligned} F'1 &= renc(moi,\ a) \\ F''1 &= s(a) \\ F2 &= \neg renc(moi,a) \vee \neg rem(moi,a) \vee inscr(a) \\ F3 &= \neg renc(moi,a) \vee \neg interet(a) \\ F4 &= \neg renc(moi,a) \vee \neg inscr(a)) \vee interet(a) \\ F5 &= \neg renc(moi,a) \vee rem(moi,a) \vee \neg s(a) \end{aligned}$$

Enumération : $s(a), renc(moi,a), interet(a), rem(moi,a), inscr(a)$

76.

F_1: $\forall y \forall x\Big(\neg(leftof(x,y) \vee leftof(y,x)) \supset x = y\Big) = \forall y \forall x\Big(G \supset H\Big)$

F_2: $\forall y \forall x\Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset \neg(leftof(x,y) \vee leftof(y,x))\Big) = \forall y \forall x\Big(F \supset G\Big)$

F_3: $\forall y \forall x\Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x\Big)$

2. Justification

1	$\mathcal{F} \vdash \Big(F \supset G\Big)$	*(séquent prouvé)*
2	$\mathcal{F} \vdash \Big(G \supset H\Big)$	*(séquent prouvé)*

$$
\begin{array}{lll}
3 & \mathcal{F}, F \vdash \left(F \supset G\right) & \textit{(augmentation)} \\
4 & \mathcal{F}, F \vdash \left(G \supset H\right) & \textit{(augmentation)} \\
5 & \mathcal{F}, F \vdash F & \textit{(hypothèse)} \\
6 & \mathcal{F}, F \vdash G & \textit{(MP sur 5 et 3)} \\
7 & \mathcal{F}, F \vdash H & \textit{(MP sur 6 et 4)} \\
8 & \mathcal{F} \vdash \left(F \supset H\right) & \textit{(Synthèse)}
\end{array}
$$

3. La forme clausale de $F_1, F_2, \neg F_3$ est (sans les $\forall$)

$leftof(x,y) \vee leftof(y,x) \vee x = y$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x,y)$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y,x)$, $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg(a = b)$

3.1) De $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x,y)$ et $cube(a)$ on déduit $\neg cube(y) \vee \neg leftof(a,y)$

De $\neg cube(y) \vee \neg leftof(a,y)$ et $cube(b)$ on déduit $\neg leftof(a,b)$

De même on déduit de $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y,x)$ et $cube(a)$, $cube(b)$, que $\neg leftof(b,a)$

puis de $\neg leftof(b,a)$, $\neg leftof(a,b)$, $leftof(x,y) \vee leftof(y,x) \vee x = y$, $\neg(a = b)$ on déduit la clause vide.

3.2)

$$
\begin{array}{rl}
\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(F \supset G\right) & \textit{(hypothèse)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(F \supset G\right) & \textit{(instantiation , } y \textit{ substituable à } y\textit{)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \left(F \supset G\right) & \textit{(instantiation , } x \textit{ substituable à } x\textit{)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(G \supset H\right) & \textit{(hypothèse)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(G \supset H\right) & \textit{(instantiation , } y \textit{ substituable à } y\textit{)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \left(G \supset H\right) & \textit{(instantiation , } x \textit{ substituable à } x\textit{)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \left(F \supset H\right) & \textit{(question 2 , Exercice 76)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(F \supset H\right) & \textit{(généralisation universelle car } x \textit{ non libre dans } \{F_1, F_2\}\textit{)} \\
\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(F \supset H\right) & \textit{(généralisation universelle car } y \textit{ non libre dans } \{F_1, F_2\}\textit{)}
\end{array}
$$

or $\forall y \forall x \left(F \supset H \right)$ est F_3.