Complexité descriptionnelle, automates bidirectionnels et nondéterminisme restreint

Viliam Geffert [1] Bruno Guillon [2] Giovanni Pighizzini [3]

[1] Department of Computer Science
P. J. Šafárik University, Košice
Slovakia

[2] Université Nice-Sophia Antipolis and
École Normale Supérieure de Lyon
France

[3] Dipartimento di Informatica e Comunicazione
Università degli Studi di Milano
Italy

EJCIM 2012 – Rennes, France – 19 mars 2012

Complexité descriptionnelle

On s'intéresse plus :

- ni au temps de calcul
- ni à l'espace de calcul

mais à la *taille* de la machine.

souvent taille:= nombre d'états

Complexité descriptionnelle

On s'intéresse plus :

- ni au temps de calcul
- ni à l'espace de calcul

mais à la *taille* de la machine.

souvent taille:= nombre d'états

Complexité descriptionnelle

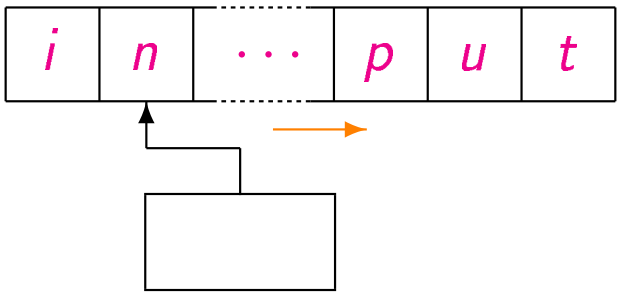
On s'intéresse plus :

- ni au temps de calcul
- ni à l'espace de calcul

mais à la *taille* de la machine.

souvent taille:= nombre d'états

Automates finis



Version de base :

- unidirectionnel déterministe (1DFA)
- unidirectionnel nondéterministe (1NFA)

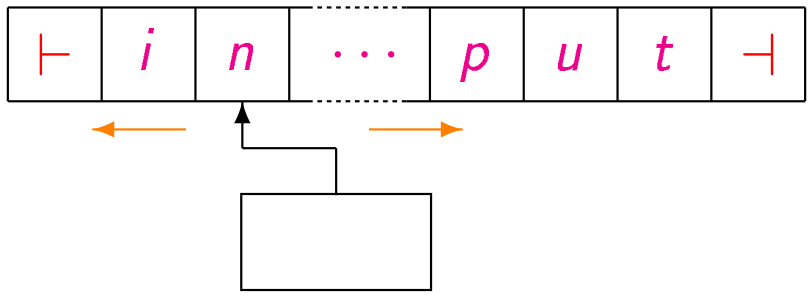
Variantes :

- bidirectionnels (2DFA, 2NFA)
- alternés
- ...

Fait

Tous reconnaissent exactement les langages rationnels.

Automates finis



Version de base :

- unidirectionnel déterministe (1DFA)
- unidirectionnel nondéterministe (1NFA)

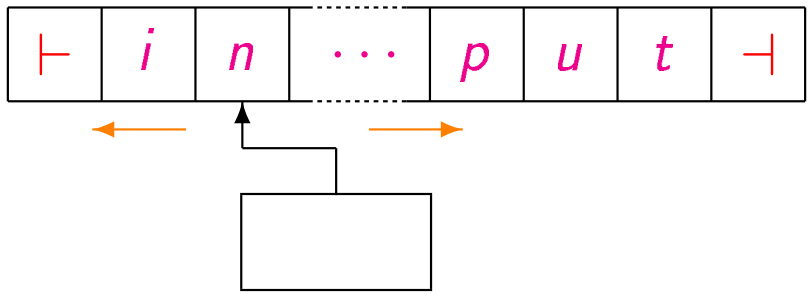
Variantes :

- bidirectionnels (2DFA, 2NFA)
- alternés
- ...

Fait

Tous reconnaissent exactement les langages rationnels.

Automates finis



Version de base :

- unidirectionnel déterministe (1DFA)
- unidirectionnel nondéterministe (1NFA)

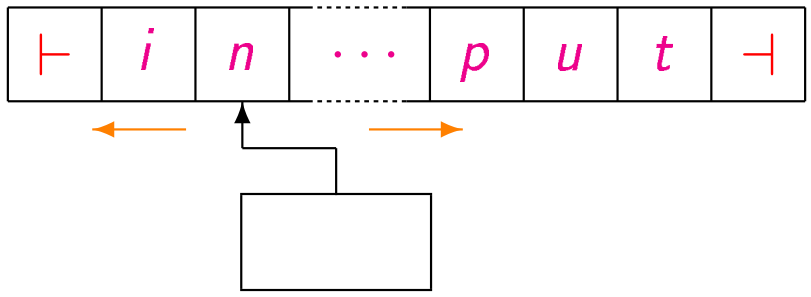
Variantes :

- bidirectionnels (2DFA, 2NFA)
- alternés
- ...

Fait

Tous reconnaissent exactement les langages rationnels.

Automates finis



Version de base :

- unidirectionnel déterministe (1DFA)
- unidirectionnel nondéterministe (1NFA)

Variantes :

- bidirectionnels (2DFA, 2NFA)
- alternés
- ...

Fait

Tous reconnaissent exactement les langages rationnels.

Exemple : 1DFA versus 1NFA

- borne supérieure :

$$\underset{n \text{ états}}{\text{1NFA}} \longrightarrow \underset{2^n \text{ états}}{\text{1DFA}}$$

(algorithme des parties)

- borne inférieure :

Pas mieux que 2^n

(langage $\{0,1\}^* \cdot 1 \cdot \{0,1\}^n$)

Exemple : 1DFA versus 1NFA

- borne supérieure :

$$\underset{n \text{ états}}{\text{1NFA}} \longrightarrow \underset{2^n \text{ états}}{\text{1DFA}}$$

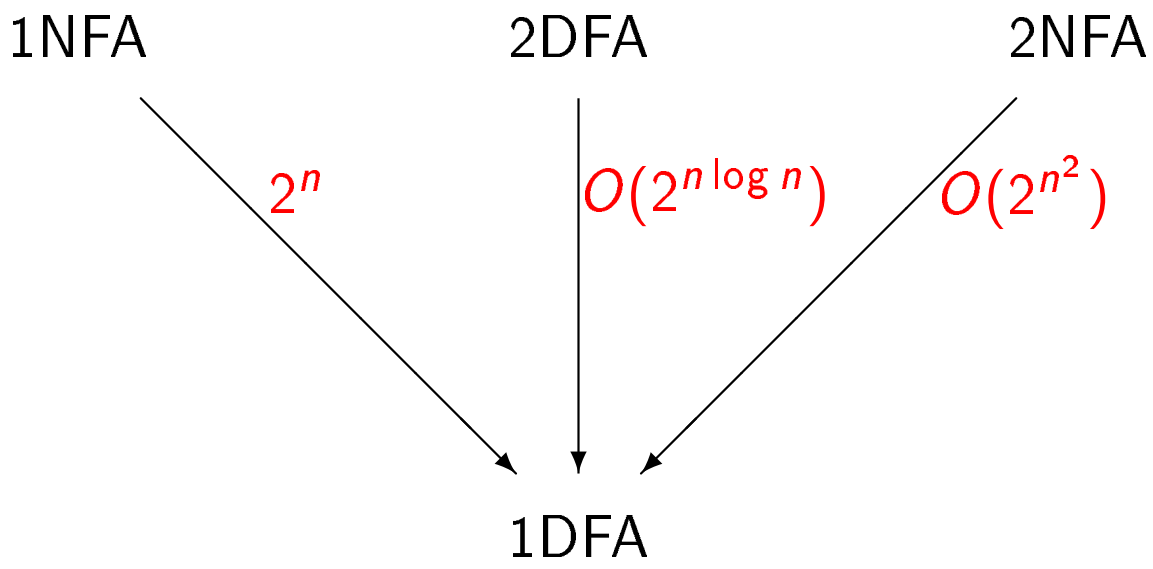
(algorithme des parties)

- borne inférieure :

Pas mieux que 2^n

(langage $\{0,1\}^* \cdot 1 \cdot \{0,1\}^n$)

Coût de la simulation optimale entre automates

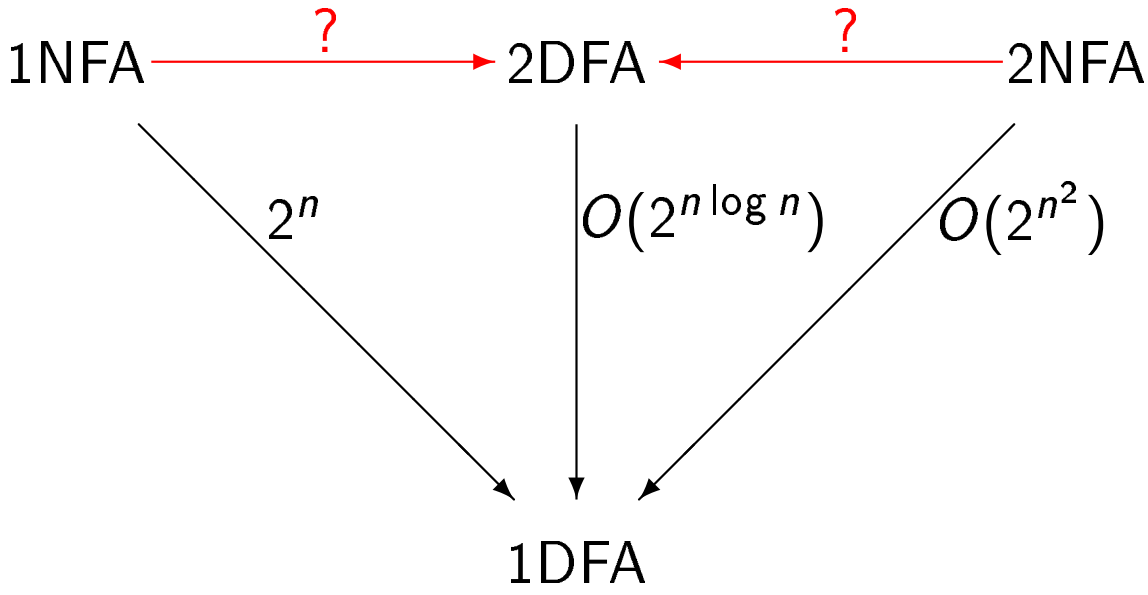


[Rabin&Scott '59, Shepardson '59, Meyer&Fischer '71, ...]

Question

Comment la bidirectionnalité peut-elle être utilisée pour éliminer le nondéterminisme ?

Coût de la simulation optimale entre automates

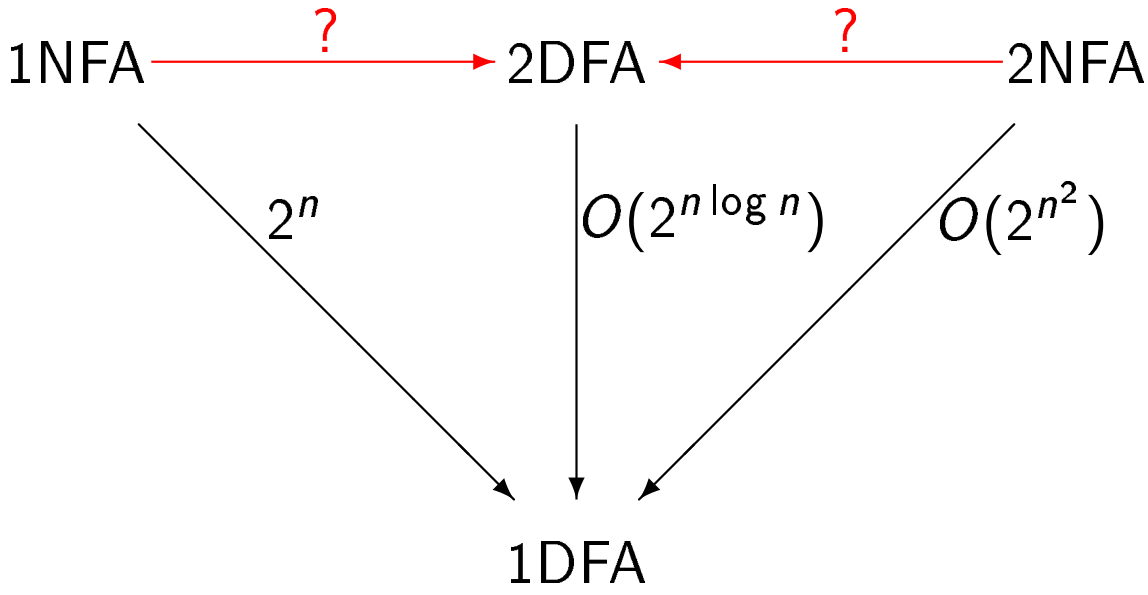


[Rabin&Scott '59, Shepardson '59, Meyer&Fischer '71, ...]

Question

Comment la bidirectionnalité peut-elle être utilisée pour éliminer le nondéterminisme ?

Coût de la simulation optimale entre automates

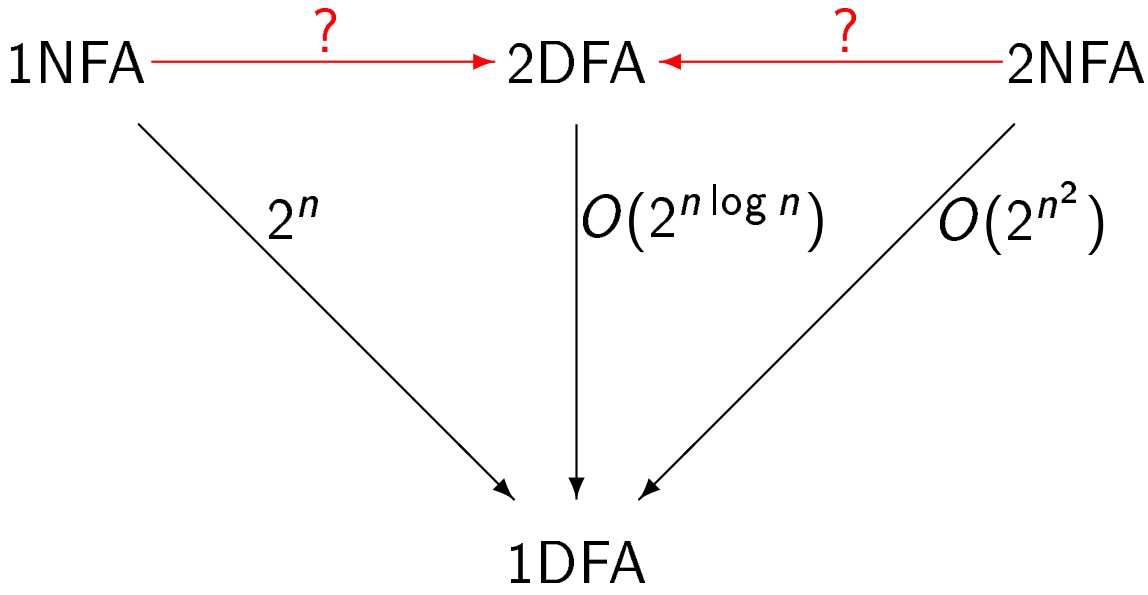


Problème ([Sakoda&Sipser '78])

Existe-t-il une simualtion polynomiale de

- *1NFAspar 2DFAs*
- *2NFAs par 2DFAs ?*

Coût de la simulation optimale entre automates



Problème ([Sakoda&Sipser'78])

Existe-t-il une simualtion polynomiale de

- *1NFAspar 2DFAs*
- *2NFAs par 2DFAs ?*

Conjecture

Non, ces simulations ne sont pas polynomiales.

Borne supérieure et borne inférieure

- Borne sup. exponentielle
  dérivé de l'algorithme des parties

- Borne inf. polynomiale
  pour le coup $c(n)$ de la simulation des 1NFAs par 2DFAs :
  - $c(n) \in \Omega(\frac{n^2}{\log n})$ [Berman&Lingas '77]
  - $c(n) \in \Omega(n^2)$ [Chrobak '86]

Borne supérieure et borne inférieure

- Borne sup. exponentielle
  dérivé de l'algorithme des parties

- Borne inf. polynomiale
  pour le coup $c(n)$ de la simulation des 1NFAs par 2DFAs :
  - $c(n) \in \Omega(\frac{n^2}{\log n})$ [Berman&Lingas '77]
  - $c(n) \in \Omega(n^2)$ [Chrobak '86]

Borne supérieure et borne inférieure

- très difficile dans sa forme générale
- pas de résultats encourageant

L'écart des deux bornes est trop important
(Polynome vs Exponentiel)

Approchons la question sur des cas restreints !

Question de Sakoda & Sipser

- très difficile dans sa forme générale
- pas de résultats encourageant

L'écart des deux bornes est trop important
(Polynome vs Exponentiel)

Approchons la question sur des cas restreints !

2NFAs versus 2DFAs : versison restreintes

- Restriction sur les machine simulantes (i.e., 2DFAs)
  - sweeping automata [Sipser '80]
  - oblivious automata [Hromkovič&Schnitger '03]
  - "few reversal" automata [Kapoutsis '11]
- Restriction sur les *langages*
  - le cas unaire [Geffert,Mereghetti&Pighizzini '03]
- restriction sur la machine simulée (i.e., 2NFA)
  - **notre approche ici**

2NFAs versus 2DFAs : versison restreintes

- Restriction sur les machine simulantes (i.e., 2DFAs)
  - sweeping automata [Sipser '80]
  - oblivious automata [Hromkovič&Schnitger '03]
  - "few reversal" automata [Kapoutsis '11]
- Restriction sur les *langages*
  - le cas unaire [Geffert,Mereghetti&Pighizzini '03]
- restriction sur la machine simulée (i.e., 2NFA)
  - **notre approche ici**

2NFAs versus 2DFAs : versison restreintes

- Restriction sur les machine simulantes (i.e., 2DFAs)
  - sweeping automata [Sipser '80]
  - oblivious automata [Hromkovič&Schnitger '03]
  - "few reversal" automata [Kapoutsis '11]
- Restriction sur les *langages*
  - le cas unaire [Geffert,Mereghetti&Pighizzini '03]
- restriction sur la machine simulée (i.e., 2NFA)
  - **notre approche ici**

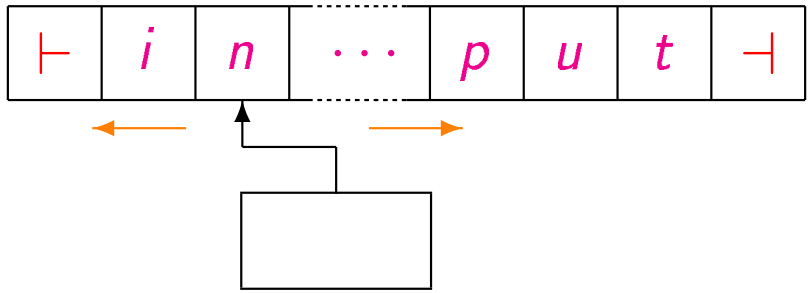
2NFAs versus 2DFAs : versison restreintes

- Restriction sur les machine simulantes (i.e., 2DFAs)
  - sweeping automata [Sipser '80]
  - oblivious automata [Hromkovič&Schnitger '03]
  - "few reversal" automata [Kapoutsis '11]
- Restriction sur les *langages*
  - le cas unaire [Geffert,Mereghetti&Pighizzini '03]
- restriction sur la machine simulée (i.e., 2NFA)
  - **notre approche ici**

2NFAs versus 2DFAs : versison restreintes

- Restriction sur les machine simulantes (i.e., 2DFAs)
  - sweeping automata [Sipser '80]
  - oblivious automata [Hromkovič&Schnitger '03]
  - "few reversal" automata [Kapoutsis '11]
- Restriction sur les *langages*
  - le cas unaire [Geffert,Mereghetti&Pighizzini '03]
- restriction sur la machine simulée (i.e., 2NFA)
  - **notre approche ici**

2ONFAs : nondéterminisme au bord

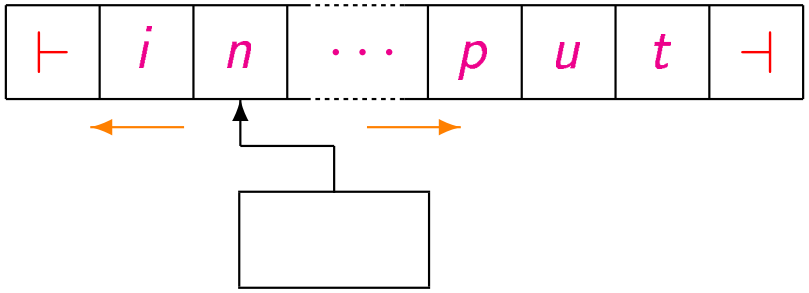


Nous considérons le modèle suivant :

Définition

Un 2DFA est nondéterminite aux bords ssi les choix nondéterministes ne sont autorisés qu'aux marqueurs de fin. noté ONFA

Forme normale



Propriété

On peut simuler tout ONFA à n états par un ONFA vérifiant :

- *le nombre d'état est au plus 3n*
- *les choix nondéterministes ne sont autorisés qu'au marqueur de fin gauche*
- *il y a un unique état final bloquant, atteignable uniquement par mouvement stationnaire au marqueur de fin gauche*
- *il n'y a pas d'autre mouvements stationnaires*

Segments

Définition

On appelle segment une partie de calcul de l'automate entre deux visites du marqueur de fin gauche.

Propriété

Un 2ONFA accepte un mot w ssi il existe une suite $s_1, s_2, \ldots, s_k$ de segments "connectés" passant de l'état initial à l'état final.

On peut supposer $k < n$.

Segments

Définition

On appelle segment une partie de calcul de l'automate entre deux visites du marqueur de fin gauche.

Propriété

Un 2ONFA accepte un mot w ssi il existe une suite $s_1, s_2, \ldots, s_k$ de segments "connectés" passant de l'état initial à l'état final.

On peut supposer $k < n$.

Segments

Définition

On appelle segment une partie de calcul de l'automate entre deux visites du marqueur de fin gauche.

Propriété

Un 2ONFA accepte un mot w ssi il existe une suite $s_1, s_2, \ldots, s_k$ de segments "connectés" passant de l'état initial à l'état final.

On peut supposer $k < n$.

La clé : *reach*

Procédure $reach(p, q)$ vérifie **déterministiquement** l'existence d'un segment :

- commençant dans l'état p
- finissant dans l'état q

Propriété

Encodable dans un 2DFA avec un nombre polynomial d'états.

La clé : *reach*

Procédure $reach(p, q)$ vérifie **déterministiquement** l'existence d'un segment :

- commençant dans l'état p
- finissant dans l'état q

Propriété

Encodable dans un 2DFA avec un nombre polynomial d'états.

Graphe

On regarde le graphe suivant :

- les nœuds sont les états
- arête entre p et q si $reach(p, q)$

Remarque

La taille du graphe est constante !

w accepté $\Leftrightarrow$ existe suite de segments "connectés"...
$\Leftrightarrow$ existe un chemin de q_0 à q_f dans le graphe

Instance de GAP $\in$ NL

Graphe

On regarde le graphe suivant :

- les nœuds sont les états
- arête entre p et q si $reach(p, q)$

Remarque

La taille du graphe est constante !

w accepté $\Leftrightarrow$ existe suite de segments "connectés"...
$\Leftrightarrow$ existe un chemin de q_0 à q_f dans le graphe

Instance de GAP $\in$ NL

Graphe

On regarde le graphe suivant :

- les nœuds sont les états
- arête entre p et q si $reach(p, q)$

Remarque

La taille du graphe est constante !

w accepté $\Leftrightarrow$ existe suite de segments "connectés"...

$\Leftrightarrow$ existe un chemin de q_0 à q_f dans le graphe

Instance de GAP $\in$ NL

Graphe

On regarde le graphe suivant :

- les nœuds sont les états
- arête entre p et q si $reach(p, q)$

Remarque

La taille du graphe est constante !

w accepté $\Leftrightarrow$ existe suite de segments "connectés"...
$\Leftrightarrow$ existe un chemin de q_0 à q_f dans le graphe

Instance de GAP $\in$ NL

Graphe

On regarde le graphe suivant :

- les nœuds sont les états
- arête entre p et q si $reach(p, q)$

Remarque

La taille du graphe est constante !

w accepté $\Leftrightarrow$ existe suite de segments "connectés"...
$\Leftrightarrow$ existe un chemin de q_0 à q_f dans le graphe

Instance de GAP $\in$ NL

Petits rappels

- NL : ...acceptés par une machine de Turing nondéterministe en espace logarithmique
- L : ...accptés par une machine de Turing déterministe en espace logarithmique

Petits rappels

- NL : ...acceptés par une machine de Turing nondéterministe en espace logarithmique
- L : ...accptés par une machine de Turing déterministe en espace logarithmique

Petits rappels

- NL : ...acceptés par une machine de Turing nondéterministe en espace logarithmique
- L : ...accptés par une machine de Turing déterministe en espace logarithmique

Problème

$L \stackrel{?}{=} NL$

Petits rappels

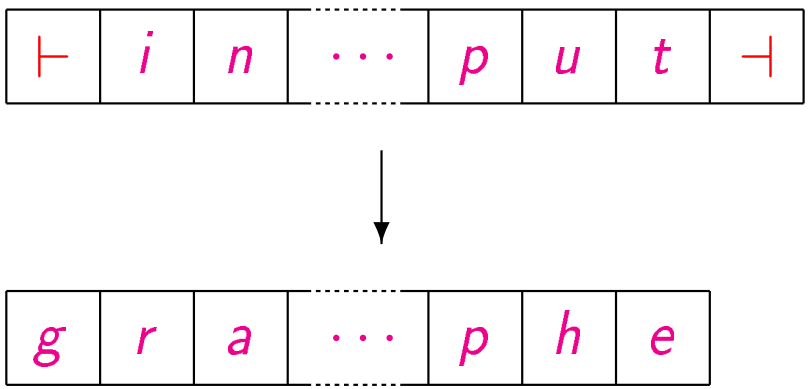
- NL : ...acceptés par une machine de Turing nondéterministe en espace logarithmique
- L : ...accptés par une machine de Turing déterministe en espace logarithmique

Problème

$L \stackrel{?}{=} NL$

GAP est NL-complet

Schéma de notre "machine"



$taille = m + 2$

Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL

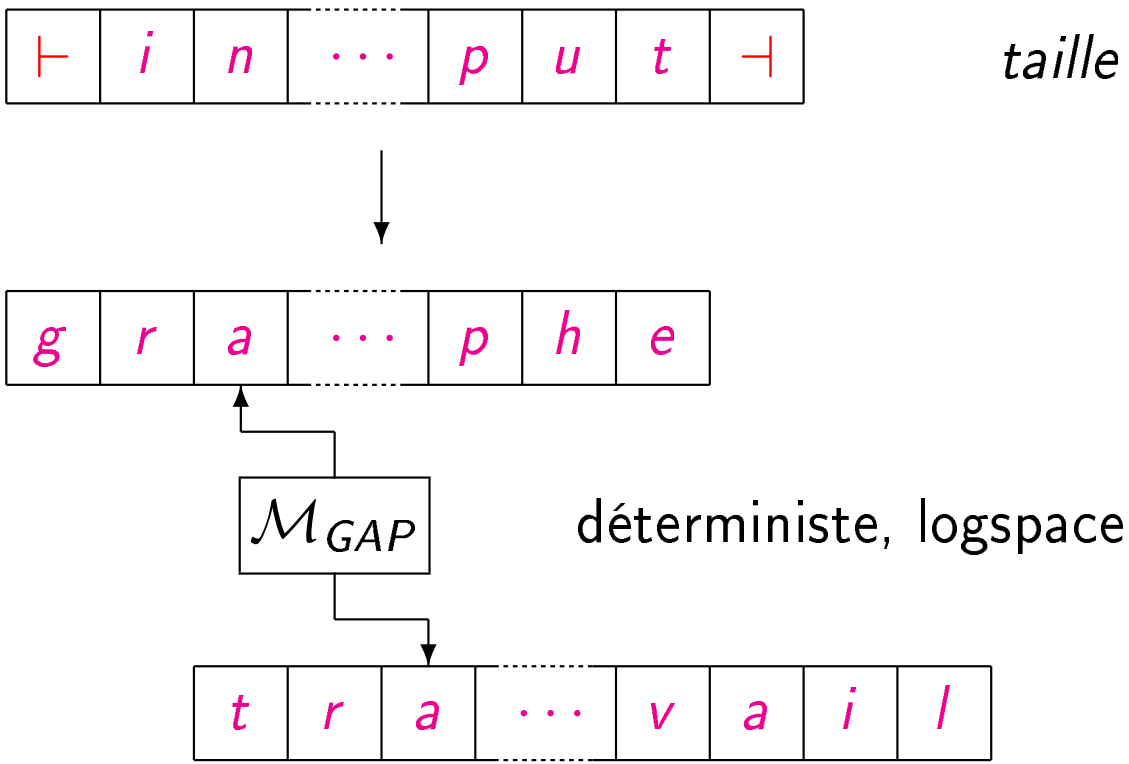


Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL

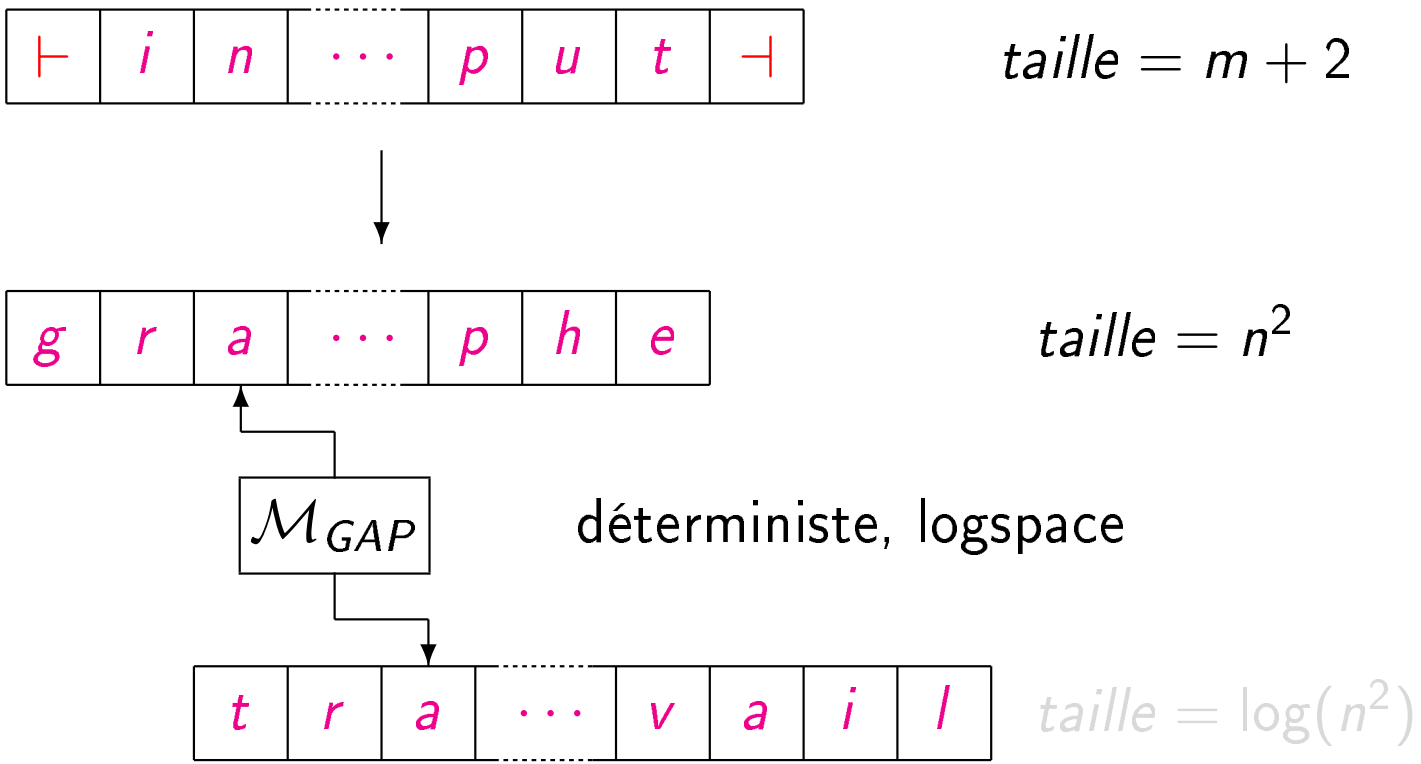


Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL

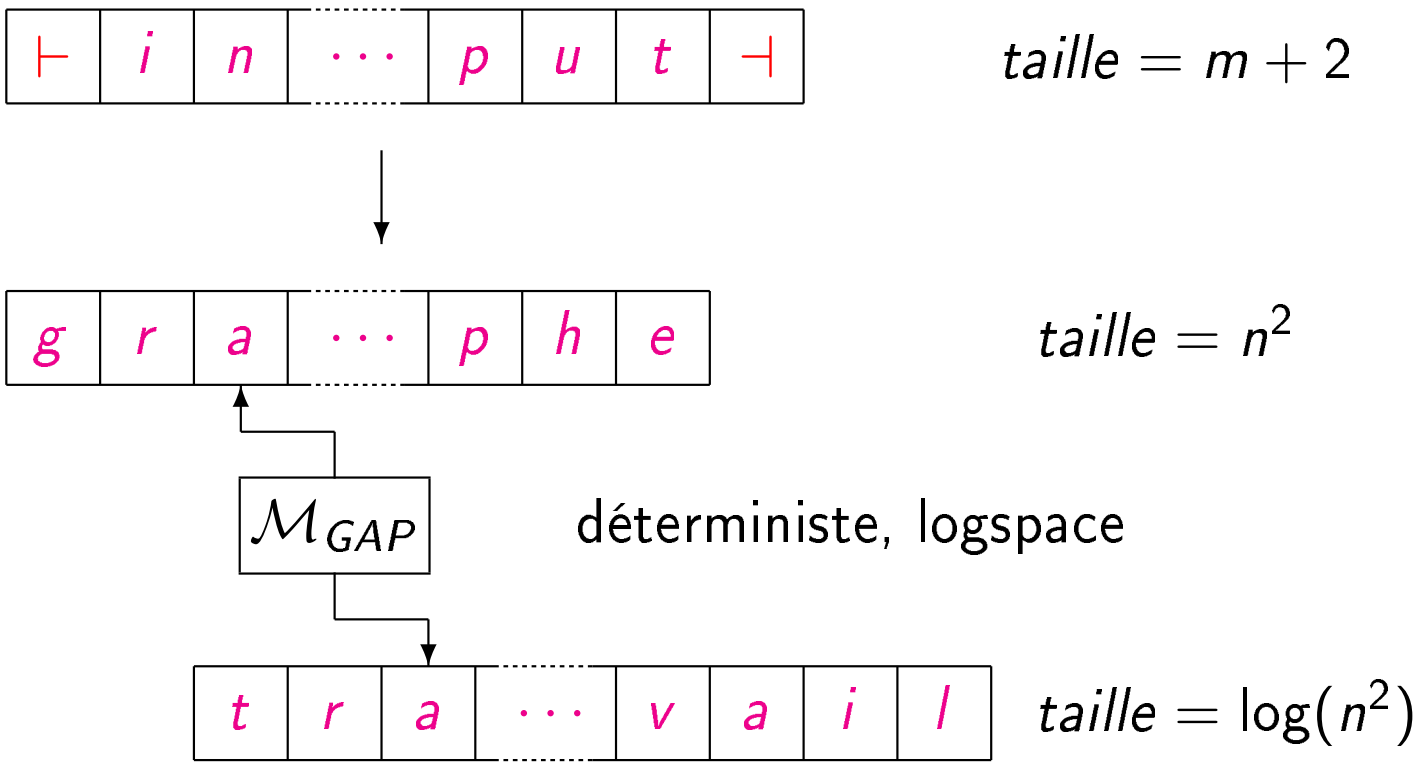


Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL

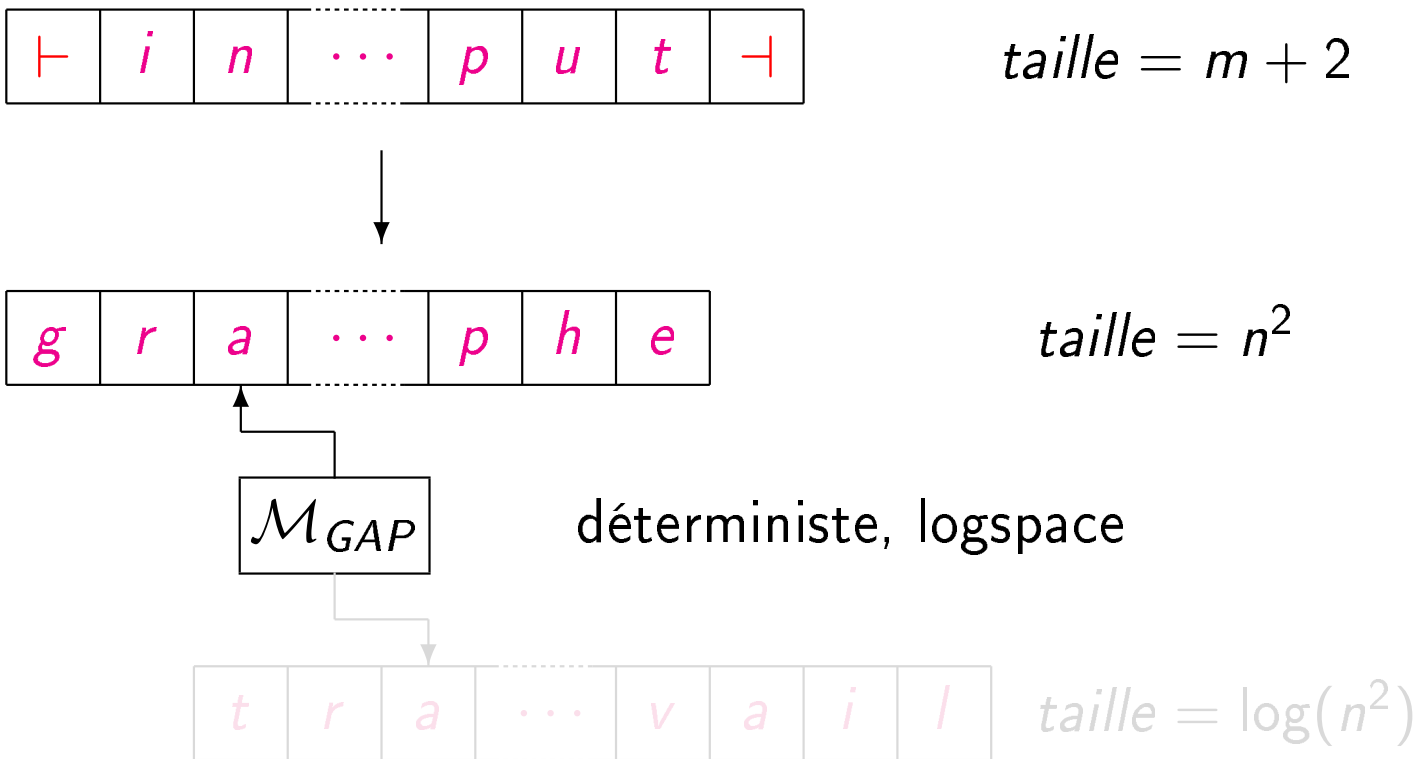


Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL

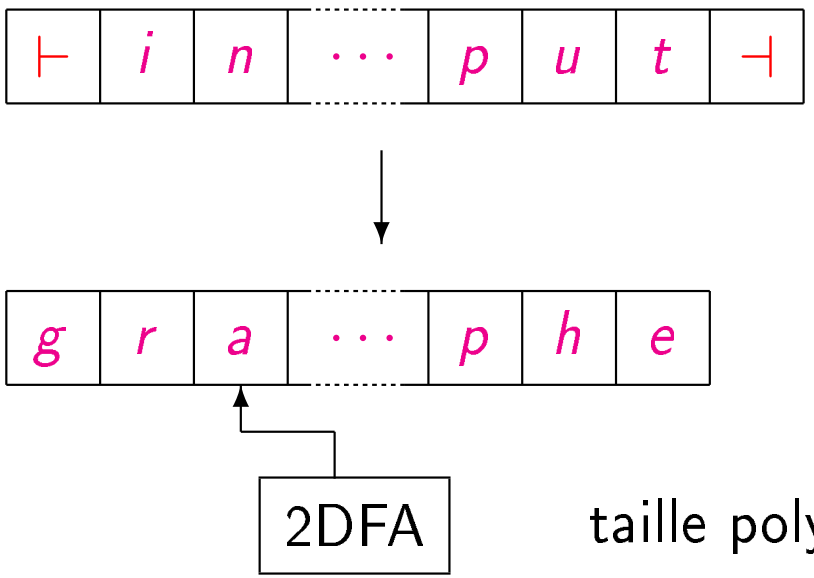
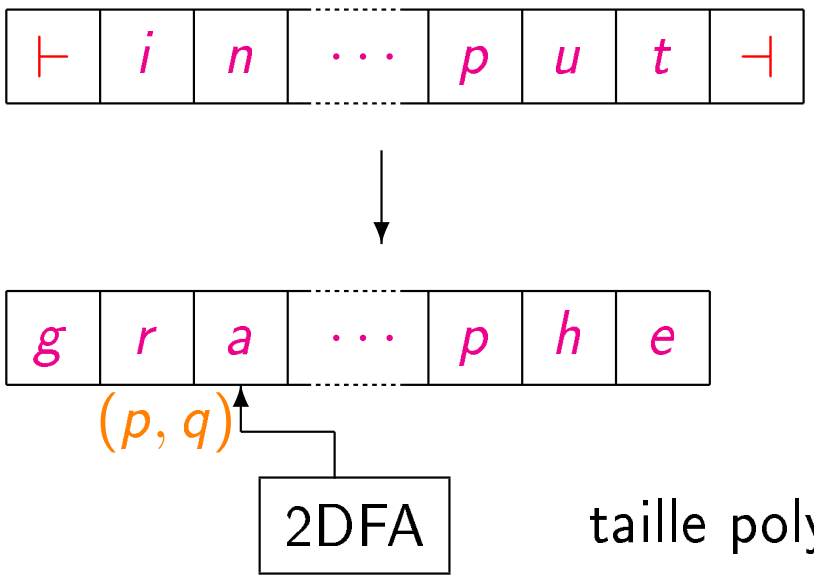


Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL



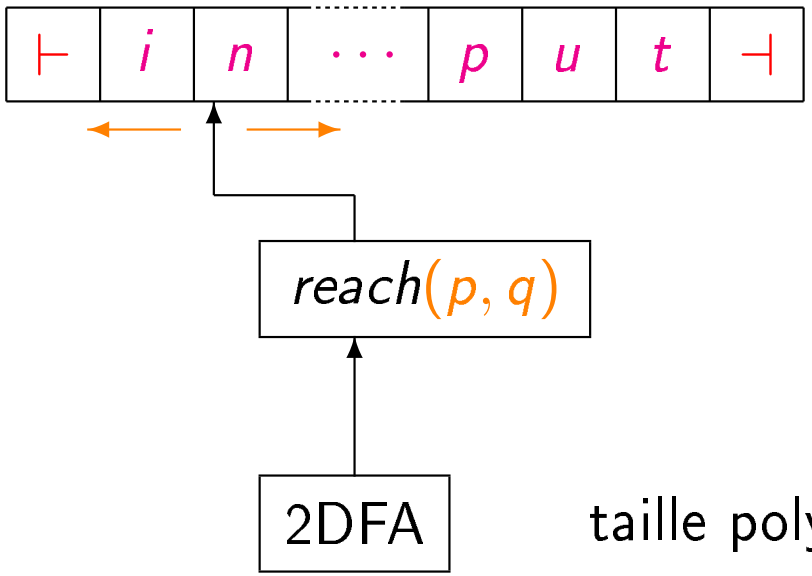
$taille = m + 2$

$taille = n^2$

taille polynomiale en n

Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL

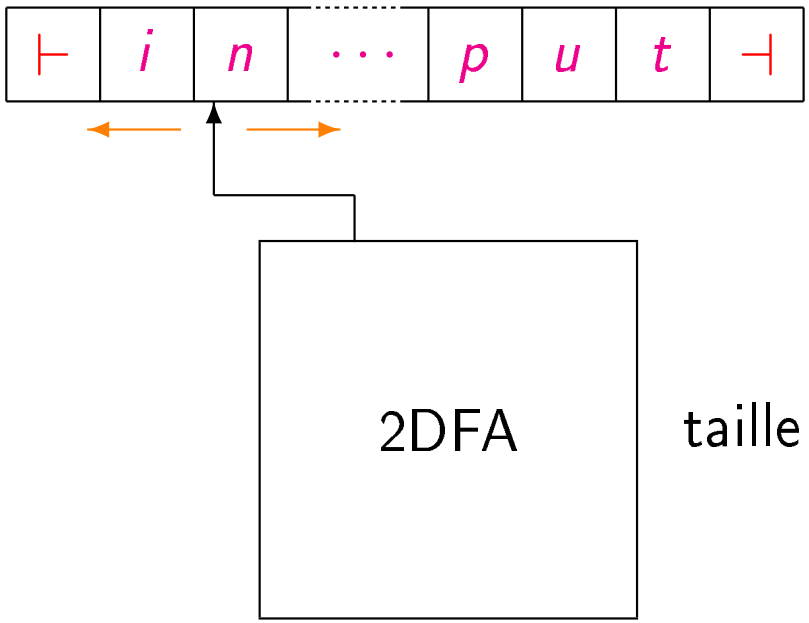


$taille = m + 2$

taille polynomiale en n

Schéma de notre "machine"

Sous l'hypothèse L= NL



$taille = m + 2$

taille polynomiale en n

Résultats

1. Simulation sous-exponentielle de 2ONFAs par 2DFAs
2. Simulation polynomiale de 2ONFA spar 2DFAs si L=NL
3. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2ONFAs non-ambigu
4. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2SVFAs

Résultats

1. Simulation sous-exponentielle de 2ONFAs par 2DFAs
2. Simulation polynomiale de 2ONFA spar 2DFAs si L=NL
3. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2ONFAs non-ambigu
4. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2SVFAs

Résultats

1. Simulation sous-exponentielle de 2ONFAs par 2DFAs
2. Simulation polynomiale de 2ONFA spar 2DFAs si L=NL
3. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2ONFAs non-ambigu
4. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2SVFAs

Résultats

1. Simulation sous-exponentielle de 2ONFAs par 2DFAs
2. Simulation polynomiale de 2ONFA spar 2DFAs si L=NL
3. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2ONFAs non-ambigu
4. Simulation polynomiale de 2ONFAs par 2SVFAs

Merci, avez-vous des questions ?