Algorithmique
TD n$^{\text{o}}$ 6 : Programmation dynamique

Exercice 1 : Note d'examen

Un sujet d'examen est composé de n questions ayant chacune un barème (c'est-à-dire une note max.) $b_1,\ldots,b_n$. La somme des b_i est supérieure (ou égale) à 20. Une fois corrigée, la copie d'un étudiant-e est représentée par une note $v_1,\ldots,v_n$ pour les différents exercices. On souhaite désormais calculer la note de l'étudiant-e sur 20. Pour cela, deux méthodes sont possibles (on en verra une troisième plus tard !) :

- en choisissant au mieux les exercices afin d'arriver à un barème **d'au plus 20** (on choisit, parmi les sous-ensembles d'exercices dont la note totale max. est **inférieure ou égale à 20**, celui qui maximise la note de l'étudiant-e).
- en choisissant au mieux les exercices afin d'arriver à un barème **égal à 20** : on choisit, parmi les sous-ensembles d'exercices dont la note totale max. est **précisément égale à 20**, celui qui maximise la note de l'étudiant-e.

Exercice 2 : Embrouillaminis (sujet d'examen 2022-2023)

Etant données deux chaînes de caractères a et b de longueurs respectives n et m ($a = a_0 \ldots a_{n-1}$ et $b = b_0 \ldots b_{m-1}$). On dit qu'une chaîne c de taille $n+m$ ($c = c_0 \ldots c_{n+m-1}$) est un *embrouillamini* de a et b si et seulement si le mot c correspond à un entrelacement des deux mots, c'est-à-dire qu'il existe deux séquences croissantes d'indices $i_1,\ldots,i_n$ et $j_1 \ldots j_m$ à valeur dans $\{0,\ldots,n+m-1\}$ telles que (1) les deux séquences sont disjointes ($i_k \neq j_{k'}$ pour tout k, k') et (2) $c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_n} = a$ et $c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_m} = b$.
Par exemple, le mot $c =$ bavurdeer est un embrouillamini de $a =$ barder et $b =$ vue. Pour le voir, on peut choisir les deux séquences $0,1,4,5,7,8$ et $2,3,6$ (ou bien les séquences $0,1,4,5,6,8$ et $2,3,7$) comme illustré ci-dessous :

0	1	2	3	4	5	6	7	8
b	a	v	u	r	d	e	e	r
b	a			r	d		e	r
		v	u			e		

0	1	2	3	4	5	6	7	8
b	a	v	u	r	d	e	e	r
b	a			r	d	e		r
		v	u				e	

1. (0.5pt) Est-ce que bcasavee est un embrouillamini de base et cave ? Est-ce que ppeersste est un embrouillamini de pres et peste ? Justifiez vos réponses.
2. (0.5pt) Si un mot c est un embrouillamini d'un mot a et d'un mot b, que sait-on sur la première lettre de c ? Et sur la dernière lettre de c ?
3. (1pt) On suppose que l'on dispose de deux mots A et B sous la forme d'un tableau de caractères (A de taille n, avec des indices de 0 à $n-1$, et B de taille m). Et C est un tableau de $n+m$ caractères. Pour décider si C est un embrouillamini de A et B, on va construire un tableau de booléens T à deux dimensions (T est de taille $(n+1)\times(m+1)$, dont les indices commencent à 0) tel que $T[i][j]$ **est VRAI si et seulement si le mot** $C[0\ldots i+j-1]$ **est un embrouillamini du mot** $A[0\ldots i-1]$ **et du mot** $B[0\ldots j-1]$. On prendra $T[0][0]$ égal à VRAI (le mot vide contient bien les deux mots vides).
   NB : $A[0\ldots i-1]$ désigne le préfixe de longueur i du mot représenté par A et $A[0\ldots -1]$ est le mot vide (on prend les mêmes conventions pour B et C).

   Compléter le tableau T pour $C =$ "bavurdeer", $A =$ "barder" et $B =$ "vue" commencé ci-dessous :

	0	1	2	3
0	$True$	$False$	$False$	$-$
1	$True$	$False$	$-$	$-$
2	$True$	$True$	$-$	$-$
3	$False$	$-$	$-$	$-$
4	$-$	$-$	$-$	$-$
5	$-$	$-$	$-$	$-$
6	$-$	$-$	$-$	$-$

4. (0.5pt) Une fois que l'on dispose de T, comment savoir si C est bien un embrouillamini de A et B ?
5. (1.5pt) Donner la définition de $T[i][j]$ avec $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant m$ en fonction d'autres valeurs de T et des lettres de A, B et C.
6. (1.5pt) Ecrire un algorithme pour construire le tableau pour des mots A, B et C.
7. (1.5pt) Etant donnés des mots A, B et C et un tableau T défini comme ci-dessus, écrire un algorithme pour retrouver (lorsque C est un embrouillamini de A et B) deux séquences d'indices qui en témoignent (c'est-à-dire : indiquer pour chaque lettre de C si on l'associe au mot A ou au mot B dans la décomposition).
8. (1pt) Et si les lettres de A et de B sont distinctes, peut-on simplifier la procédure pour tester si un mot C est un embrouillamini de A et B ?

NB : Les questions 6, 7 et 8 sont indépendantes.

Exercice 3 : le jeu de Double-Nim

On considère le jeu à deux joueurs suivant. Au début de la partie il y a n allumettes sur la table. Les deux joueurs jouent à tour de rôle en enlevant des allumettes. Celui qui enlève la dernière allumette a gagné. Les règles sont :

- au premier tour, le premier joueur ne peut pas prendre toutes les allumettes d'un coup ;
- aux tours suivants, un joueur doit prendre au minimum une allumette et au maximum le double du nombre pris par l'autre joueur au tour précédent.

1. Donnez une récurrence $J(n, m)$ disant si une position donnée est gagnante ou perdante selon le nombre n d'allumettes restantes et le nombre maximum m d'allumettes que l'on peut prendre.

2. Donner la table de J pour $n = 8$

3. Programmez cette récurrence sous forme d'une fonction récursive. Affichez pour tout n si le premier joueur a une stratégie gagnante, et combien d'appels récursifs ont été faits.

4. Interpréter l'affichage :
- proposer une hypothèse sur les nombres n pour lesquels le premier joueur gagne ;
- constater que le nombre d'appels récursifs est exponentiel en n.

5. Améliorez votre programme à l'aide de la programmation dynamique.